Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Funciones inducidas de formas débiles de funciones abiertas a productos simétricos

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Fortunata Yolanda García Arellano

DIRECTORES DEL TRABAJO:
Dr. David Maya Escudero
Dr. José Guadalupe Anaya Ortega

Toluca, México, Noviembre de 2019

UAEM

INTRODUCCIÓN

La topología es la rama de las Matemáticas que estudia las propiedades de objetos geométricos que permanecen invariantes bajo deformaciones en las que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del objeto original y la deformación, además de que tal acción hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. A tales deformaciones las llamamos homeomorfismos. Así que informalmente diremos que la topología permite doblar, estirar, encoger y retorcer los objetos, pero no cortar o separar lo que está unido ni pegar lo que está separado.

Los objetos de estudio son parejas de la forma (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X cerrada bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias. Una familia τ con estas características es llamada *topología* para X y el par (X, τ) *espacio topológico*. A los elementos de τ se les llama *abiertos*.

Uno de los conceptos fundamentales más importantes en topología es el de función continua. Si (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función, intuitivamente decimos que f es *continua* en $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$.

Es de especial interés determinar cuando dos espacios tienen las mismas propiedades topológicas, es decir, cuando dos espacios son equivalentes, esto ocurre cuando existe una función continua y biyectiva entre los espacios para la cual su función inversa es también continua; a estas funciones se les conoce como homeomorfismos. Mostrar que la imagen de un conjunto abierto bajo una función sea también un conjunto abierto es un excelente criterio para determinar homeomorfismos. Las funciones que satisfacen tal condición son llamadas funciones abiertas. De éstas, se desprende una gama de clases de funciones: inductivamente abierta, casi abierta, pseudo abierta, cociente, semi abierta y denso abierta. Dichas clases serán nuestro objeto de estudio.

Otra herramienta para describir propiedades de un espacio topológico (X, τ) son los hiperespacios, los cuales son colecciones de subconjuntos de X que satisfacen ciertas condiciones. Uno de mayor importancia está formado por conjuntos no vacíos con a lo más n elementos. Este hiperespacio, denotado como $F_n(X)$, es llamado *producto simétrico*. Dados (X, τ_X) y (Y, τ_Y)

espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función, se define la *función inducida al n-ésimo producto simétrico* por f como: $f_n : F_n(X) \to F_n(Y)$ dada por $f_n(A) = f(A)$. Es de nuestro interés estudiar dicha función en relación con las clases de funciones mencionadas anteriormente.

Este escrito está formado por cuatro capítulos, de los cuales el primero es una recopilación de conceptos básicos y notaciones imprescindibles para un seguimiento asequible. Además se exponen propiedades y resultados que serán empleados en nuestras futuras demostraciones.

En el segundo capítulo analizaremos la relación directa entre nuestras clases de funciones. Para ser mas específicos, veremos que ser función abierta implica ser inductivamente abierta, toda función inductivamente abierta es casi abierta, una función casi abierta es pseudo abierta, la familia de las funciones cociente está contenida en la familia de las funciones pseudo abiertas, y que las familias de funciones semi abiertas y denso abiertas forman parte de la familia de las funciones abiertas. Cabe mencionar que todas las familias de funciones expuestas son distintas. Mostraremos ejemplos de cada afirmación. Por otro lado, se presentan caracterizaciones de cada clase de funciones en los términos topológicos de interior, cerradura y frontera de conjuntos.

En el Capítulo 3 mostramos los resultados obtenidos del análisis en la generación de nuevas funciones: función restricción, la función composición, la función suma topológica y la función producto topológico. Dicho análisis se enfoca en las siguientes clases de funciones: abiertas, inductivamente abiertas, casi abiertas, pseudo abiertas, cociente, semi abiertas y denso abiertas.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio de las implicaciones entre las siguientes dos condiciones:
1. $f \in \mathfrak{M}$,
2. $f_n \in \mathfrak{M}$
cuando $\mathfrak{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: abiertas, inductivamente abiertas, casi abiertas, pseudo abiertas, cociente, semi abiertas y denso abiertas. Este problema se ha abordado en varias ocasiones para clases de funciones entre espacios métricos, compactos conexos y no degenerados ([1], [2], [3], [6], [8]). Los resultados originales que presentamos hacen más completo el estudio realizado hasta este momento alrededor de este tema.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos notaciones, definiciones y conceptos elementales para un seguimiento accesible al resto de los capítulos. También veremos propiedades, equivalencias y resultados de los cuales nos serviremos para nuestras futuras demostraciones.

1.1. Conjuntos y funciones

Sea X un conjunto. El conjunto $P(X) = \{A : A \subseteq X\}$ es llamado el ***conjunto potencia*** de X.

Notación 1.1. *Sean X un conjunto y $A \subseteq X$. El símbolo $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A.*

La siguiente proposición se puede consultar en [5, pág. 30].

Proposición 1.2. *Sean X un conjunto y $A, B, C \subseteq X$. Entonces $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$*

Notación 1.3. *Sean X y Y conjuntos, $y \in Y$, $V \subseteq Y$ y $f : X \to Y$ una función. Denotaremos a:*

1. *La imagen inversa de y bajo f como:*

$$f^{-1}[y] = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

2. *La imagen inversa de V bajo f como:*

$$f^{-1}[V] = \{x \in X : f(x) \in V\}.$$

Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es ***suprayectiva*** si para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Proposición 1.4. *Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es suprayectiva si y solo si $f(f^{-1}[B]) = B$ para todo $B \subseteq Y$.*

La demostración de la proposición anterior se puede consultar en [5, pág. 60].

Proposición 1.5. *Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, entonces $f(A \cap f^{-1}[B]) = f(A) \cap B$.*

Demostración. Sabemos que $f(A \cap f^{-1}[B]) \subseteq f(A) \cap f(f^{-1}[B])$. Dado que f es suprayectiva, de la Proposición 1.4 se sigue que $f(A \cap f^{-1}[B]) \subseteq f(A) \cap B$. Por otro lado, sea $y \in f(A) \cap B$. Entonces $f^{-1}[y] \cap A \neq \emptyset$ y $f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[B]$. Así, $f^{-1}[y] \cap (A \cap f^{-1}[B]) \neq \emptyset$. Esto implica que $y \in f(A \cap f^{-1}[B])$. Por tanto, $f(A) \cap B \subseteq f(A \cap f^{-1}[B])$. Lo que prueba la igualdad. $\square$

1.2. Espacios topológicos

1.2.1. Conceptos básicos y algunas propiedades de espacios topológicos

Sean X un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** para X si satisface las siguientes condiciones:

i) $\emptyset, X \in \tau$.

ii) Si $\mathfrak{C} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathfrak{C} \in \tau$.

iii) Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.

A los elementos de τ se les llama ***abiertos*** y a la pareja (X, τ) ***espacio topológico***.

Notación 1.6. *Sean X y L conjuntos, τ_X una topología para X y n un número natural. Adoptaremos la siguiente notación.*

1. $\tau_X \setminus \{\emptyset\} = \tau_X^*$.

2. $\{O \subseteq L : |O| \leq n\} = [L]^{<n+1}$.

3. $\{O \subseteq L : |O| < \infty\} = [L]^{<\infty}$.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $\beta \subseteq \tau$. Decimos que β es ***base*** para τ si para todo $x \in X$ y para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para que una colección de subconjuntos pueda ser base de alguna topología sobre X. Dicho resultado puede ser consultado en [9, Teorema 6.1, pág. 87].

Teorema 1.7. *Sean X un conjunto y β una colección de subconjuntos de X tal que $\bigcup \beta = X$. Si para todo $x \in X$ y para cualesquiera $B_1, B_2 \in \beta$ tales que $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ de modo que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, entonces $\tau_\beta = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup \mathcal{B} : \mathcal{B} \subseteq \beta\}$ es topología sobre X y β es base para τ_β.*

Sea X un conjunto. Una ***subbase*** δ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La ***topología generada por la subbase*** δ se define como la colección τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de δ, es decir, $\tau_\delta = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup \mathcal{B} : \mathcal{B} \subseteq \{\bigcap \mathcal{C} : \mathcal{C} \in [\delta]^{<\infty}\}\}$.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

a) La topología generada por la colección $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ se denomina ***topología usual*** sobre $\mathbb{R}$.

b) La topología generada por la colección $\{(a, b) \times (c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b \text{ y } c < d\}$ se denomina ***topología usual*** sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Siempre que trabajemos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$ como espacio topológico, lo supondremos con la topología usual, previmente mencionada, a menos que se especifique cualquier otra cosa y lo denotamos como $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}^2, \tau_{\mathbb{R}^2})$, respectivamente.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $Z \subseteq X$. La colección $\tau_Z = \{Z \cap U : U \in \tau\}$ es una topología sobre Z, nombrada ***topología de subespacio*** o ***topología relativa***. A (Z, τ_Z) se le denomina ***subespacio*** de X.

Notación 1.8. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}^2$.*

a) *El símbolo (A, τ_U) representa al subespacio A dotado con la topología relativa de $\mathbb{R}$*

b) *El símbolo (B, τ_U) representa al subespacio B dotado con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$*

Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Decimos que X es de ***Hausdorff*** o $\boldsymbol{T}_2$ si para cada par de puntos distintos x, y de X, existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

1.2.2. Interior, cerradura y frontera de conjuntos

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Definimos:

1. El ***interior*** de A en X como:

$$\mathrm{Int}_X A = \{x \in X : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\}.$$

2. La ***cerradura*** de A en X como:

$$\mathrm{Cl}_X A = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \tau \text{ tal que } x \in U\}.$$

3. La ***frontera*** de A en X como:

$$\mathrm{Fr}_X A = \mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus A).$$

Proposición 1.9. *Sean (X, τ) un espacio topológico, Z un subespacio de X y $A \subseteq Z$. Entonces:*

a) $\mathrm{Int}_Z A \supseteq Z \cap \mathrm{Int}_X A$

b) $\mathrm{Cl}_Z A = Z \cap \mathrm{Cl}_X A$

La demostración para *a*) se puede consultar en [11, Teorema 1.24, pág. 38] y para *b*) en [10, Teorema 17.4, pág. 108].

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que A es ***cerrado*** en X si $X \setminus A \in \tau$.

Proposición 1.10. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, entonces:*

a) $A \in \tau$ *si y solo si* $A = \mathrm{Int}_X A$.

b) A *cerrado en* X *si y solo si* $A = \mathrm{Cl}_X A$.

La demostración para a) se puede consultar en [11, Teorema 1.16, pág. 33] y para b) en [11, Teorema 1.11, pág. 29].

Proposición 1.11. *Si* (X, τ) *es un espacio topológico y* $A \subseteq X$*, entonces:*

a) $\mathrm{Int}_X A \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}_X A$

b) $\mathrm{Cl}_X(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int}_X A$.

c) $\mathrm{Fr}_X A = \mathrm{Cl}_X A \setminus \mathrm{Int}_X A$.

Demostración. El inciso a) se sigue de la definición de los conceptos de interior y cerradura de conjuntos. La demostración de c) se localiza en [4, 4.11, pág. 72].

b) De a) se tiene que $\mathrm{Int}_X A \subseteq A$. Por tanto, $X \setminus A \subseteq X \setminus \mathrm{Int}_X A$ y así, $\mathrm{Cl}_X(X \setminus A) \subseteq \mathrm{Cl}_X(X \setminus \mathrm{Int}_X A)$. Dado que $X \setminus (X \setminus \mathrm{Int}_X A) = \mathrm{Int}_X A \in \tau$, se tiene que $X \setminus \mathrm{Int}_X A$ es un subconjunto cerrado de X. Luego, de la Proposición 1.10 obtenemos que $\mathrm{Cl}_X(X \setminus A) \subseteq X \setminus \mathrm{Int}_X A$. Por otro lado, sea $x \in X \setminus \mathrm{Int}_X A$ y $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Si $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, entonces $U \subseteq X \setminus (X \setminus A) = A$. Esto quiere decir que $x \in \mathrm{Int}_X A$, lo cual nos lleva a una contradicccción. Por tanto, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ y así, $x \in \mathrm{Cl}_X(X \setminus A)$. De esta manera, $X \setminus \mathrm{Int}_X A \subseteq \mathrm{Cl}_X(X \setminus A)$, lo que concluye la igualdad.

$\square$

Proposición 1.12. *Si* (X, τ) *es un espacio topológico y* $A, B \subseteq X$*, entonces:*

a) $(\mathrm{Int}_X A) \cup (\mathrm{Int}_X B) \subseteq \mathrm{Int}_X(A \cup B)$

b) $\mathrm{Int}_X(A \cap B) = (\mathrm{Int}_X A) \cap (\mathrm{Int}_X B)$

c) $(\mathrm{Cl}_X A) \cup (\mathrm{Cl}_X B) = \mathrm{Cl}_X(A \cup B)$

La demostración de los incisos a) y b) se puede consultar en [11, Teorema 1.16, pág. 33] y la del inciso c) en [11, Teorema 1.12, pág. 30].

Corolario 1.13. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{A} \in [P(X)]^{<\infty}$. Entonces* $\mathrm{Cl}_X(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup\limits_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D$.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es ***denso*** en X si $\mathrm{Cl}_X A = X$.

1.2.3. Funciones continuas

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua en x_0 si para todo $V \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in V$, existe $U \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U$ y $f(U) \subseteq V$. La función f es ***continua*** si es continua en cada uno de los puntos de X.

Los siguientes teoremas establecen equivalencias al concepto de continuidad. Muy a menudo utulizaremos el Teorema 1.15 para mostrar la continuidad de una función.

Teorema 1.14. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y solo si $f^{-1}[V] \in \tau_X$ para todo $V \in \tau_Y$.*

Se puede consultar una demostración para el teorema anterior en [10, Teorema 18.1, pág 118].

Teorema 1.15. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, β_Y base para τ_Y y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y solo si $f^{-1}[B] \in \tau_X$ para todo $B \in \beta_Y$.*

El resultado antes mencionado se puede verificar en [10, pág 117].

Proposición 1.16. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $B \subseteq Y$. Se satisfacen las siguientes condiciones:*

a) $f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$.

b) $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]$.

c) $\mathrm{Fr}_X f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B]$.

Demostración. *a*) Dado que f es una función continua sabemos que $f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] \in \tau_X$. Con esto y las proposiciones 1.10 y 1.11, concluimos que $f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] = \mathrm{Int}_X f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$.

La prueba del inciso *b*) se puede consultar en [4, Teorema 8.3, pág 79]. El inciso *c*) se sigue de la definción y del inciso *b*).

□

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es ***abierta*** si $f(U) \in \tau_Y$ para todo $U \in \tau_X$.

En el desarrollo de todos los capítulos emplearemos la siguiente proposición para mostrar que una función sea abierta

Proposición 1.17. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, β_X base para τ_X y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es abierta si y solo si $f(B) \in \tau_Y$ para todo $B \in \beta_X$.*

Demostración. Por la definición de función abierta sólo basta probar que para $U \in \tau_X$, $f(U) \in \tau_Y$, siempre que $f(B) \in \tau_Y$ para todo $B \in \beta_X$. Sea $y \in f(U)$. Entonces existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Dado que β_X es base para X, se tiene que existe $B \in \beta_X$ tal que $x \in B \subseteq U$. Así $y \in f(B) \subseteq f(U)$. Sabemos que $f(B) \in \tau_Y$. Por tanto $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Concluimos que $f(U) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(U)$, lo que demuestra que $f(U) \in \tau_Y$.

□

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es un ***homeomorfismo*** si:

a) f es biyectiva

b) f es continua

c) $f^{-1} : Y \to X$ es una función continua.

El siguiente teorema muestra una caracterización de los homeomorfismos. La demostración de tal resultado se puede consultar en [4, Teorema 12.2, pág. 89]

Teorema 1.18. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. La siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) f es un homeomorfismo.

b) f es continua y abierta

Capítulo 2

Formas débiles de funciones abiertas

2.1. Clases de formas débiles de funciones abiertas

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, decimos que f es:

a) ***Abierta*** si $\{f(U) : U \in \tau_X\} \subseteq \tau_Y$

b) ***Inductivamente abierta*** si existe un subespacio Z de X tal que $f(Z) = Y$ y $f|_Z$ es abierta

c) ***Casi abierta*** si para cada $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que

$$y \in \bigcap \{\mathrm{Int}_Y f(U) : x \in U \in \tau_X\}$$

d) ***Pseudo abierta*** si para cada $y \in Y$, se cumple que $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$ para cada $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}[y] \subseteq U \in \tau_X$.

e) ***Cociente*** si $\{V \subseteq Y : f^{-1}[V] \in \tau_X\} \subseteq \tau_Y$

f) ***Semi abierta*** si $\{\mathrm{Int}_Y f(U) : U \in \tau_X^*\} \subseteq \tau_Y^*$

g) ***Denso abierta*** si para todo $U \in \tau_X$, existe $V \in \tau_Y$ tal que $\mathrm{Cl}_V f(U) = V$.

El siguiente resultado muestra la relación directa entre las clases de funciones anteriormente mencionadas.

Teorema 2.1. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva. Se verifican las siguientes proposiciones.*

a) Si f *es abierta, entonces* f *es inductivamente abierta.*

b) Si f *es inductivamente abierta, entonces* f *es casi abierta.*

c) Si f *es casi abierta, entonces* f *es pseudo abierta.*

d) Si f *es pseudo abierta, entonces* f *es cociente.*

e) Si f *es abierta, entonces* f *es semi abierta.*

f) Si f *es abierta, entonces* f *es denso abierta.*

Demostración. a) Supongamos que f es una función abierta. El subespacio $Z = X$ cumple que $f(Z) = Y$ y $f|_Z = f$ es una función abierta. Por lo tanto, f es inductivamente abierta.

b) Ahora supongamos que existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $f|_Z$ es abierta. Sea $y \in Y$. La hipótesis nos garantiza la existencia de $x \in Z$ tal que $f(x) = y$. Por tanto $x \in f^{-1}[y]$. Ahora, sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Entonces $x \in U \cap Z \in \tau_Z$. Con lo que se tiene $y = f(x) \in f(U \cap Z) = \mathrm{Int}_Y f(U \cap Z) \subseteq f(U)$. Por tanto, $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Esto demuestra que f es casi abierta.

c) Supongamos que f es casi abierta. Sean $y \in Y$ y $V \in \tau_X$ tal que $f^{-1}[y] \subseteq V$. Sabemos que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$ para todo $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Dado que $x \in V$, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y f(V)$. Con lo que se concluye que f es pseudo abierta.

d) Sean $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}[V] \in \tau_X$ y $y \in V$. Entonces $f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[V]$. De suponer que f es pseudo abierta, se obtiene que $y \in \mathrm{Int}_Y f(f^{-1}[V]) = \mathrm{Int}_Y V$. Por tanto $V \subseteq \mathrm{Int}_Y V$. De las Proposiciones 1.11 y 1.10 se sigue que $V \in \tau_Y$. Esto prueba que las funciones pseudo abiertas son funciones cociente.

e) Supongamos que f es abierta. Si $U \in \tau_X^*$, entonces $f(U) \in \tau_Y^*$ y por tanto, $\mathrm{Int}_Y f(U) \neq \emptyset$. Es decir, f es semi abierta.

f) Sea $U \in \tau_X$. De suponer que f es abierta, tenemos que $f(U) \in \tau_Y$. Sea $V = f(U)$. Entonces $V \in \tau_Y$ es tal que $\mathrm{Cl}_V f(U) = V$. Concluimos que f es denso abierta.

$\square$

Proposición 2.2. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *espacios topológicos. Si* $f : X \to Y$ *es una función cociente e inyectiva, entonces* f *es abierta.*

Demostración. Sea $U \in \tau_X$. Como f es inyectiva, se tiene que $f^{-1}[f(U)] = U$. Dado que f es cociente, concluimos que $f(U) \in \tau_Y$. Esto prueba que la función f es abierta.

$\square$

Corolario 2.3. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *espacios topológicos. Si* $f : X \to Y$ *es una función inyectiva y* f *es pseudo abierta o casi abierta o inductivamente abierta, entonces* f *es abierta.*

Más adelante veremos que si f es inyectiva y semi abierta ó, inyectiva y denso abierta, no siempre se cumple que f sea una función abierta.

2.2. Ejemplos de clases de formas débiles de funciones abiertas

A continuación presentamos ejemplos de cada una de las clases de funciones previamente mencionadas y ejemplos que muestran que el inverso de cada proposición en el Teorema 2.1 no se cumple.

Ejemplo 2.4. *Sean* X *un espacio topológico,* Y *un espacio topológico discreto y* $f : X \to Y$ *una función continua y suprayectiva. Se tiene que* f *es una función abierta.*

Ejemplo 2.5. *Sean* X *un espacio indiscreto y* Y *un espacio topológico. Si* $f : X \to Y$ *es una función continua y suprayectiva, entonces* f *es una función abierta.*

Ejemplo 2.6. *Sean* X *un conjunto y* $p \in X$. *Definimos la topología para* X *como* $\tau_{X_p} = \{\emptyset\} \cup \{V \subseteq X : p \in V\}$. *Si existen un conjunto* Y *y una función suprayectiva* $f : X \to Y$, *entonces* $f : (X, \tau_{X_p}) \to (Y, \tau_{Y_{f(p)}})$ *es abierta.*

Notemos que si $V \neq \emptyset \in \tau_{Y_{f(p)}}$, entonces $f(p) \in V$, por lo que $p \in f^{-1}[V] \in \tau_{X_p}$. Lo que garantiza que la función f es continua. Por otro lado, sea $U \in \tau_{X_p}$, $U \neq \emptyset$. Entonces $p \in U$ y así $f(p) \in f(U) \in \tau_{Y_{f(p)}}$. Esto muestra que f es una función abierta.

Ejemplo 2.7. *Sean $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{0,1\}$, $\tau_X = \{A \subseteq X : 4 \notin A\} \cup \{X\}$ y $\tau_Y = \{\emptyset, \{0\}, Y\}$. Definimos $f : X \to Y$ como:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 1,3 \\ 1, & si\ x = 2,4 \end{cases}$$

Veremos que f es inductivamente abierta pero no abierta.

Como podemos observar nuestra función es continua y suprayectiva. Notemos que el subespacio $Z = \{1,4\}$ satisface que $f(Z) = Y$. Además, $\tau_Z = \{\emptyset, \{1\}, Z\}$ y $f(W) \in \tau_Y$ para cada $W \in \tau_Z$. Esto muestra que f es una función inductivamente abierta. Por otro lado, se tiene que $\{2\} \in \tau_X$, pero $f(\{2\}) = \{1\} \notin \tau_Y$. Es decir, f no es una función abierta.

Ejemplo 2.8. *Consideremos $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$. La función $\sigma : (X, \tau_U) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ definida por $\sigma(x,y) = x$ es una función inductivamente abierta pero no abierta.*

Notemos que σ es suprayectiva. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Obsérvese que $\sigma^{-1}[(a,b)] = (a,b) \times \{0\} \in \tau_X$ si $0 \notin (a,b)$ y $\sigma^{-1}[(a,b)] = ((a,b) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \in \tau_X$ si $0 \in (a,b)$. De lo anterior y del Teorema 1.15 se tiene que σ es continua. Consideremos $Z = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq X$. Así, $\sigma(Z) = \mathbb{R}$. Sean $W \in \tau_Z$ y $y \in \sigma|_Z(W)$. Entonces, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $(y, 0) \in (a,b) \times \{0\} \subseteq W$. Por tanto, $y \in (a,b) \subseteq \sigma|_Z(W)$. Dado que $(a,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_{\mathbb{R}} \sigma|_Z(W)$. Con lo que $\sigma|_Z(W) \in \tau_{\mathbb{R}}$. De la Proposición 1.17 se sigue que $\sigma|_Z$ es una función abierta y por tanto, inductivamente abierta. La función σ no es abierta puesto que para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{0\} \times (n, n+1) \in \tau_X$, pero $f(\{0\} \times (n, n+1)) = \{0\} \notin \tau_{\mathbb{R}}$.

Ejemplo 2.9. *Denotemos por $\beta = \{\{(x,y)\} : (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y\} \cup \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \times \{x\} : x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$. Sea τ_β la topología de $\mathbb{R}^2$ generada por β. Observemos que para $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \neq y$, el punto (x,y) es aislado en $(\mathbb{R}^2, \tau_\beta)$. Definimos $\mu : (\mathbb{R}^2, \tau_\beta) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ como $\mu((x,y)) = x$. Probaremos que μ es casi abierta, pero no inductivamente abierta.*

Nótese que μ es suprayectiva. Ahora, sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Observemos que $\mu^{-1}[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mu(x,y) \in (a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a,b)\} = (a,b) \times \mathbb{R} \in \tau_\beta$. Es decir, μ es una función continua. Por otro lado, sean $x \in \mathbb{R}$ y U un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}^2, \tau_\beta)$ tal que $(x,x) \in U$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $(x,x) \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{x\} \subseteq U$. Por tanto, $x \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq \mu(U)$. Con lo que se tiene que $x \in \mathrm{Int}_{\mathbb{R}}\mu(U)$. Esto prueba que μ es casi abierta.

Por otro lado, sea Z un subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_\beta)$ tal que $\mu(Z) = \mathbb{R}$. Veremos que $\mu|_Z$ no es abierta. Si existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq y$ y $(x,y) \in Z$, entonces $\{(x,y)\} \in \tau_Z$, pero $\mu(\{(x,y)\}) = \{x\} \notin \tau_{\mathbb{R}}$. Por lo que podemos suponer que $Z \subseteq \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Dado que $\mu(Z) = \mathbb{R}$, tenemos que $Z = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. Nótese que si $x \in \mathbb{R}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $Z \cap [(x-\epsilon, x+\epsilon) \times \{x\}] = \{(x,x)\} \in \tau_Z$, pero $\mu(\{(x,x)\}) = \{x\} \notin \tau_{\mathbb{R}}$. De lo anterior se concluye que $\mu|_Z$ no es inductivamente abierta.

Ejemplo 2.10. *Consideremos a* $X = \{(1/n, m) : n, m \in \mathbb{N}\} \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$ *como subespacio de* $\mathbb{R}^2$*. Sea* $Y = \{(1/n, m/n) : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$ *subconjunto de* $\mathbb{R}^2$*. Definimos* $f : X \to Y$ *dada por* $f(x,y) = (x, xy)$*. Dotemos a* Y *con la topología cociente determinada por la función* f*. Concluiremos que* f *es pseudo abierta, pero no casi abierta.*

Para cumplir con este fin, demostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación 2.11. *Si* $O \subseteq Y$*, entonces* $(0,0) \in \mathrm{Int}_Y O$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ *tal que* $\{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\} \subseteq O$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $(0,0) \in \mathrm{Int}_Y O$. Entonces existe $W \in \tau_Y$ tal que $(0,0) \in W \subseteq O$. Se tiene que $\{0\} \times \mathbb{N} = f^{-1}[(0,0)]$. Por tanto, $\{(0,k) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq f^{-1}[W] \in \tau_U$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, dado que la sucesión $\{(1/n, k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(0,k)$ en $\mathbb{R}^2$, se tiene que existe $s_k \in \mathbb{N}$ tal que $\{(0,k)\} \cup \{(1/n, k) : n \geq s_k\} \subseteq f^{-1}[W]$ (Figura 2.2). Con lo que se obtiene que $f(\{(0,k)\} \cup \{(1/n, k) : n \geq s_k\}) = \{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\} \subseteq W \subseteq O$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\} \subseteq O$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $f^{-1}[(0,0)] = \{0\} \times \mathbb{N}$

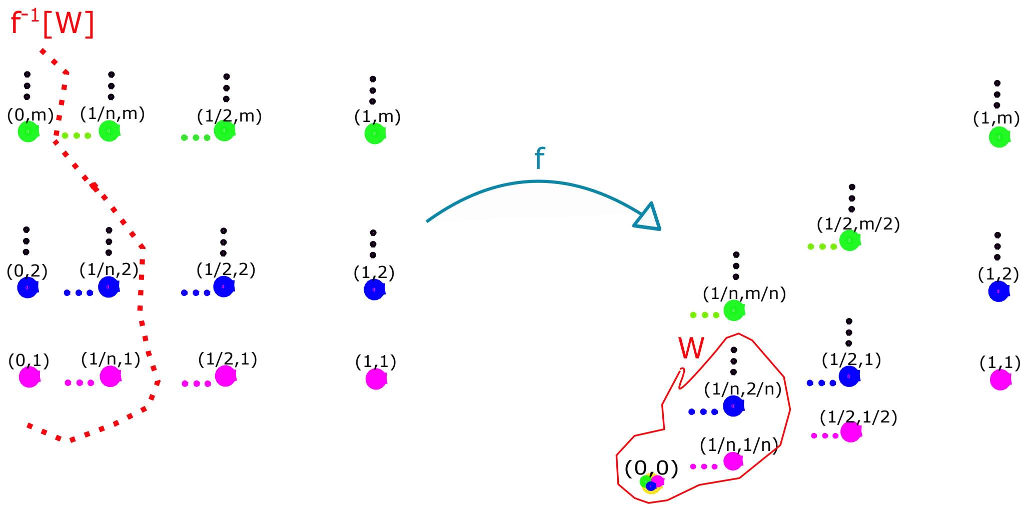

Figura 2.1:

y para cada $k \in \mathbb{N}$, $f^{-1}[\{(1/n, k/n) : n \geq s_k\}] = \{(1/n, k) : n \geq s_k\}$. Por tanto, $f^{-1}[\{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k, k \in \mathbb{N}\}] = \{(0,k)\} \cup \{(1/n, k) : n \geq s_k, k \in \mathbb{N}\}$, el cual es un subconjunto abierto del subespacio X. Esto implica que $\{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k, k \in \mathbb{N}\} \in \tau_Y$. Así, $(0,0) \in \mathrm{Int}_Y O$. $\square$

Observemos que la función f es suprayectiva. Debido a que Y fue dotado de la topología cociente determinada por f, se tiene que f es continua. Por otro lado, sean $k, w \in \mathbb{N}$. Se tiene que $f^{-1}[(1/k, w/k)] = \{(1/k, w)\} \in \tau_U$. Con lo que $\{(1/k, w/k)\}$ es un subconjunto abierto de Y. Por lo tanto, para cada $y \in Y \setminus \{(0,0)\}$ tenemos que $y \in \mathrm{Int}_Y f(V)$ para todo $V \in \tau_U$ tal que $f^{-1}[y] \subseteq V$. Ahora, sea $V \in \tau_U$ tal que $f^{-1}[(0,0)] \subseteq V$. Dado que $f^{-1}[(0,0)] = \{(0,k) : k \in \mathbb{N}\}$, se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $s_k \in \mathbb{N}$ tal que $\{(0,k)\} \cup \{(1/n, k) : n \geq s_k\} \subseteq V \subseteq f^{-1}[f(V)]$. Esto implica que $\{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\} \subseteq f(V)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, de la Afirmación 2.11 se obtiene que $(0,0) \in \mathrm{Int}_Y f(V)$.

Ahora veamos que f no es casi abierta. Sea $x \in f^{-1}[(0,0)]$. Notemos que $x = (0,m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sea $V = \{(1/n, m) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,m)\} \in \tau_U$. Supongamos que $(0,0) \in \mathrm{Int}_Y f(V)$. De la Afirmación 2.11 se sigue que existe una sucesión $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\{(0,0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\} \subseteq f(V) = \{(0,0)\} \cup \{(1/n, m/n) : n \in \mathbb{N}\}$, lo cual es absurdo.

Ejemplo 2.12. *Consideremos la recta real dotada con la topología generada por la subbase $\beta = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Dicha topología es conocida como la topología de Sorgenfrey. Sea $g : (\mathbb{R}, \tau_{Sorg}) \to ([0,\infty), \tau_U)$, definida por $g(x) = x^2$. Veremos que g es pseudo abierta, pero no casi abierta.*

Obsérvese que g es suprayectiva. Por otro lado, note que si $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a < b$, entonces $g^{-1}[[0,a)] = (-\sqrt{a}, \sqrt{a}) \in \tau_{Sorg}$ y $g^{-1}[(a,b)] = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b}) \in \tau_{Sorg}$. Esto garantiza que g es continua. Ahora, sean $y \in (0,\infty)$ y $U \in \tau_{Sorg}$ tales que $g^{-1}[y] = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\} \subseteq U$. Entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < 0 < b$ y $-\sqrt{y} \in [-\sqrt{y}, a) \subseteq U$ y $\sqrt{y} \in [\sqrt{y}, b) \subseteq U$. Así, $y \in g([-\sqrt{y}, a)) \cup g([\sqrt{y}, b)) = (a^2, y] \cup [y, b^2) = (a^2, b^2) \subseteq g(U)$. Dado que $(a^2, b^2) \in \tau_U$, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y g(U)$. Ahora, sea $U \in \tau_{Sorg}$ tal que $0 \in U$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \in [0, a) \subseteq U$. Por tanto, $0 \in [0, a^2) \subseteq g(U)$. De donde, $0 \in \mathrm{Int}_Y g(U)$. Concluimos que g es pseudo abierta.

Finalmente, sea $y \in (0,\infty)$. Notemos que para $-\sqrt{y} \in g^{-1}[y]$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < 0$ y $-\sqrt{y} \in [-\sqrt{y}, a) \in \tau_{Sorg}$, pero $y \notin \mathrm{Int}_Y g([-\sqrt{y}, a)) = \mathrm{Int}_Y (a^2, y] = (a^2, y)$. Ahora, para $\sqrt{y} \in g^{-1}[y]$ existe $a > 0$, tal que $\sqrt{y} \in [\sqrt{y}, a) \in \tau_{Sorg}$, pero $y \notin \mathrm{Int}_Y g([\sqrt{y}, a)) = \mathrm{Int}_Y [y, a^2) = (y, a^2)$. Esto muestra que para $y \in (0,\infty)$ no existe x en $g^{-1}[y]$ tal que $y \in \mathrm{Int}_Y g(U)$ para todo $U \in \tau_{Sorg}$ tal que $x \in U$. Así que g no es casi abierta.

Ejemplo 2.13. *Consideremos a $X = \{(1/n, m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup (\{0\} \times \mathbb{N}) \cup \{(0,0)\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $Y = \{(1/m, 1/n) : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Definimos $f : X \to Y$ como:*

$$f(x,y) = \begin{cases} (1/y, x), & si\ y \neq 0 \\ (x,y), & si\ y = 0 \end{cases}$$

Dotemos a Y con la topología cociente determinada por f. Así f es cociente. Mostraremos que f no es pseudo abierta.

Observemos que $f^{-1}[(0,0)] = \{(0,0)\}$. Sea $V = \{(0,0)\} \cup \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $f^{-1}[(0,0)] \subseteq V \in \tau_U$ y $f(V) = V$. Supongamos que

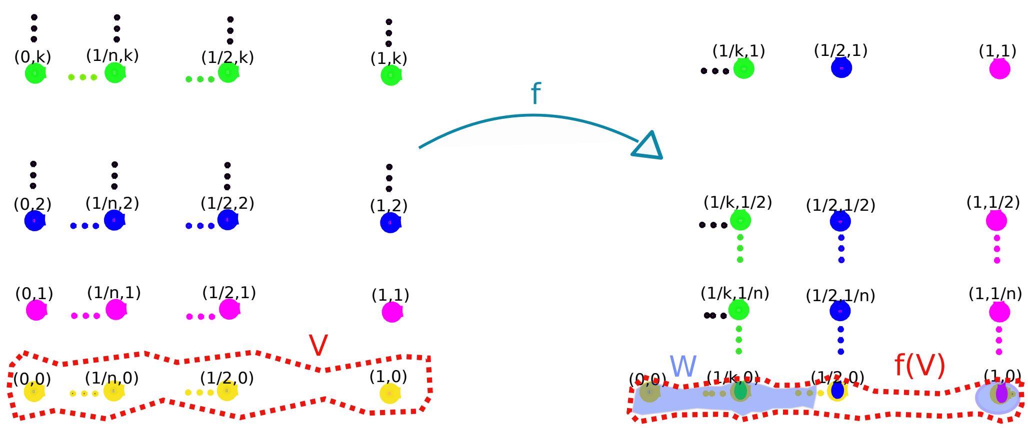

Figura 2.2:

$(0,0) \in \mathrm{Int}_Y f(V)$. Sea $W \in \tau_Y$ tal que $(0,0) \in W \subseteq f(V)$. Nótese que $W \neq \{(0,0)\}$. Por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(1/k, 0) \in W$ (Figura 2.2). Así, $f^{-1}[(1/k,0)] = \{(1/k,0),(0,k)\} \subseteq f^{-1}[W]$. Dado que $f^{-1}[W]$ es abierto en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(1/n, k) \in f^{-1}[W]$ para todo $n \geq N$. Por tanto, $f((1/n,k)) = (1/k, 1/n) \in W \subseteq f(V) = V$ para todo $n \geq N$, lo cual es absurdo. Concluimos que f no es una función pseudo abierta.

Ejemplo 2.14. *Sean* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $\tau_{\mathbb{N}^*} = \{\{0,1,2,3,...,n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}^*, \emptyset\}$. *Definimos* $h : (\mathbb{R}, \tau_{Sorg}) \to (\mathbb{N}^*, \tau_{\mathbb{N}^*})$, *dada por* $h(r) = \lfloor |r| \rfloor$, *donde* $\lfloor |r| \rfloor$ *representa la parte entera del valor absoluto de* r, *es decir,* h *asigna a* r *el mayor número entero igual o menor que el valor absoluto de* r. *Veremos que* h *es cociente, pero no pseudo abierta.*

Obsérvese que h es suprayectiva. Ahora, sean $n \in \mathbb{N}$ y $W = \{0,1,2,3,...,n\}$. Notemos que $h^{-1}[W] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \lfloor |x| \rfloor \leq n\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| < n+1\} = (-(n+1), n+1) \in \tau_{Sorg}$. Con esto se tiene que h es una función continua. Ahora veremos que h es cociente. Sea $W \subseteq \mathbb{N}^*$ tal que $h^{-1}[W] \in \tau_{sorg}$. Sea $m \in W$. Probaremos que $\{0,1,2,3,...,m\} \subseteq W$. Supongamos que existe $0 < k \leq m$ tal que $k \in W$, pero $k-1 \notin W$. Como $k \in W$, entonces $h^{-1}[k] = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor |x| \rfloor = k\} = \{x \in \mathbb{R} : k \leq |x| < k+1\} \subseteq h^{-1}[W]$. En particular se tiene que $-k \in h^{-1}[k]$. Por tanto, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $-k < a \leq -k+1$ y $-k \in [-k, a) \subseteq h^{-1}[W]$. De esto último, es posible hallar $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \in (-k, a) \subseteq h^{-1}[W]$. Así, $h(r) = \lfloor |r| \rfloor = k - 1 \in h(h^{-1}[W]) = W$, lo cual nos lleva a una contradicción. Por tanto $\{0, 1, 2, 3, ..., n\} \subseteq W$ para cada $n \in W$, es decir, $W \in \tau_{\mathbb{N}^*}$.

Por otro lado, notemos que para números naturales $n \geq 2$ se tiene que $h^{-1}[n] = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor |x| \rfloor = n\} = \{x \in \mathbb{R} : n \leq |x| < n+1\}$. Sea $U = \{x \in \mathbb{R} : n-1 < |x| < n+2\}$ un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \tau_{Sorg})$ que contiene a la imagen inversa de n bajo h. Así, $h(U) = \{n-1, n, n+1\}$, para el cual $n \notin \mathrm{Int}_{\mathbb{N}^*} h(U)$. Es decir, h no es una función pseudo abierta.

Ejemplo 2.15. *Consideremos a $X = [0, 2\pi]$, $Y = \{(sen\ t, cos\ t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Definimos $f : X \to Y$ como $f(t) = (cos\ t, sen\ t)$. Veremos que f es semi abierta pero no abierta.*

Nótese que f es suprayectiva. De la continuidad de las funciones *sen* y *cos* se sigue que f es continua. Ahora, observemos que para cualquier subconjunto abierto U no vacío de X existen θ, ϕ en $[0, 2\pi]$ tales que $(\theta, \phi) \in U$. Así, $f((\theta, \phi)) \subseteq f(U)$. Dado que la imagen bajo f de (θ, ϕ) es un subconjunto abierto no vacío de Y, se tiene que $\mathrm{Int}_Y f(U) \in \tau_Y^*$. Concluimos que f es semi abierta.

Por otra parte, se tiene que f no es abierta puesto que la imagen bajo f de los subconjuntos abiertos en X de la forma $[0, \theta)$ con $\theta \in (0, \pi)$ no contienen a $f(0) = (cos\ (0), sen\ (0)) = (1, 0)$ en su interior.

Ejemplo 2.16. *Sea X un conjunto infinito no numerable. Definimos para X la topología cofinita como $\tau_{cof} = \{V \subseteq X : X \setminus V$ es finito$\} \cup \{\emptyset\}$ y la topología conumerable como $\tau_{con} = \{V \subseteq X : X \setminus V$ es a lo más numerable$\} \cup \{\emptyset\}$. La función identidad $I_X : (X, \tau_{con}) \to (X, \tau_{cof})$ es denso abierta, pero no abierta.*

Observemos que I_X es continua y suprayectiva. Ahora, sea $U \in \tau_{con}$. Si existe $W \in \tau_{cof}$ tal que que $U \cap W = \emptyset$, entonces $U \subseteq X \setminus W$, lo que implica que U es un subconjunto finito de X. Esto nos lleva a que X es un conjunto numerable, lo cual no es cierto. Por tanto, $U \cap W \neq \emptyset$ para todo $W \in \tau_{cof}$, es decir, $\mathrm{Cl}_{X_{cof}} U = X$. Así que si $V = X$ considerado como subconjunto abierto de (X, τ_{cof}), se tiene que $\mathrm{Cl}_V I_X(U) = \mathrm{Cl}_V U = V$. Esto prueba que

I_X es una función denso abierta.

Por otro lado, se tiene que I_X no es abierta puesto que existen subconjuntos de X cuyo complemento es infinito numerable.

2.3. Caracterizaciones de formas débiles de funciones abiertas

2.3.1. Caracterización de funciones abiertas

Teorema 2.17. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *f es abierta.*

b) $\mathrm{Int}_Y B = f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B])$ *para todo $B \subseteq Y$.*

c) $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] = f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]$ *para todo $B \subseteq Y$.*

d) $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] = f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]$ *para todo $B \subseteq Y$.*

e) $\mathrm{Fr}_X f^{-1}[B] = f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B]$ *para todo $B \subseteq Y$.*

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Supongamos que f es una función abierta. Sea $B \subseteq Y$. De la continuidad de f tenemos que $f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$. Así, $f(f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]) = \mathrm{Int}_Y B \subseteq f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B])$. Por otra parte, de la hipótesis se sigue que $f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B]) = \mathrm{Int}_Y f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B]) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(f^{-1}[B]) = \mathrm{Int}_Y B$. Por tanto, $\mathrm{Int}_Y B = f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B])$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sea $B \subseteq Y$. La continuidad de f nos garantiza que $f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$. Por otra parte, como $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B])]$, de la condición *b)* se sigue que $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]$. Por lo que $f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] = \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$.

c) $\Rightarrow$ *d)* Sea $B \subseteq Y$. De la Proposición 1.11 se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] &= X \setminus \mathrm{Int}_X(X \setminus f^{-1}[B]) \\ &= X \setminus \mathrm{Int}_X(f^{-1}[Y \setminus B]). \end{aligned}$$

De lo anterior y de la hipótesis concluimos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] = & \ X \setminus f^{-1}[\mathrm{Int}_Y(Y \setminus B)] \\ = & \ f^{-1}[Y \setminus \mathrm{Int}_Y(Y \setminus B)] \\ = & \ f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B].\end{aligned}$$

.

d) $\Rightarrow$ *e)* Sea $B \subseteq Y$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B] = & \ f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B \cap \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus B)] \\ = & \ f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B] \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y(Y \setminus B)].\end{aligned}$$

De lo anterior y de la hipótesis obtenemos que:

$$\begin{aligned}f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B] = & \ \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \cap \mathrm{Cl}_X f^{-1}[Y \setminus B] \\ = & \ \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \cap \mathrm{Cl}_X(f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[B]) \\ = & \ \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[B]) \\ = & \ \mathrm{Fr}_X f^{-1}[B].\end{aligned}$$

e) $\Rightarrow$ *a)* Sean $U \in \tau_X$ y $y \in f(U)$. Por tanto, existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Supongamos que $y \notin \mathrm{Int}_Y f(U)$. Entonces $y \in \mathrm{Cl}_Y f(U) \setminus \mathrm{Int}_Y f(U) = \mathrm{Fr}_Y f(U)$. De la condición *e)* se sigue que $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[f(U)] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[f(U)] \setminus \mathrm{Int}_X f^{-1}[f(U)]$. De lo que se deduce que $x \notin U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f(U) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(U)$ y así $f(U) \in \tau_Y$. Concluimos que f es abierta.

□

2.3.2. Caracterización de funciones inductivamente abiertas

Teorema 2.18. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *f es inductivamente abierta.*

b) *Existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ e $\mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]$ para todo $B \subseteq Y$.*

c) *Existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $\mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]$ para todo $B \subseteq Y$.*

d) *Existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $\mathrm{Fr}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B]$ para todo $B \subseteq Y$.*

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Supongamos que existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $f|_Z$ es abierta. Afirmamos que Z es el subespacio que cumple la proposición *b)*. Sea $B \subseteq Y$. Dado que $f|_Z$ es abierta, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B])) &= \mathrm{Int}_Y f(\mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B])) \\ &\subseteq \mathrm{Int}_Y f(Z \cap f^{-1}[B]) \\ &\subseteq \mathrm{Int}_Y (Y \cap B) \\ &= \mathrm{Int}_Y B. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) \subseteq Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]$. Por otro lado, obsérvese que $Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] = \mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]) \subseteq \mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B])$. Concluimos que $\mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Ahora supongamos que existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y si $B \subseteq Y$, entonces se cumple que $\mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B]$. Así que para mostrar que la proposición *c)* es verdadera es suficiente probar que para cada $B \subseteq Y$, $\mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]$. Sea $B \subseteq Y$. De las proposiciones 1.11 y 1.2 se sigue que:

$$\begin{aligned} Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B] &= Z \cap f^{-1}[Y \setminus \mathrm{Int}_Y (Y \setminus B)] \\ &= Z \cap (X \setminus f^{-1}[\mathrm{Int}_Y (Y \setminus B)]) \\ &= Z \setminus (Z \cap f^{-1}[\mathrm{Int}_Y (Y \setminus B)]). \end{aligned}$$

Lo anterior y la hipótesis implican que:

$$\begin{aligned} Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B] &= Z \setminus \mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[Y \setminus B]) \\ &= Z \setminus \mathrm{Int}_Z(Z \cap (X \setminus f^{-1}[B])) \\ &= Z \setminus \mathrm{Int}_Z(Z \setminus (Z \cap f^{-1}[B])) \\ &= \mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]). \end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ *d)* Por *c)*, sabemos que existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $\mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]$ para cada subconjunto B de Y. Sea $B \subseteq Y$, entonces:

$$\begin{aligned} Z \cap f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B] &= Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B \cap \mathrm{Cl}_Y (Y \setminus B)] \\ &= Z \cap (f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B] \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y (Y \setminus B)]) \\ &= (Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]) \cap (Z \cap f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y (Y \setminus B)]) \end{aligned}$$

Esto último y la hipótesis implican que:

$$\begin{aligned} Z \cap f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B] &= \mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) \cap \mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[Y \setminus B]) \\ &= \mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) \cap \mathrm{Cl}_Z(Z \cap (X \setminus f^{-1}[B]) \\ &= \mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) \cap \mathrm{Cl}_Z(Z \setminus (Z \cap f^{-1}[B])) \\ &= \mathrm{Fr}_Z(Z \cap f^{-1}[B]). \end{aligned}$$

d) $\Rightarrow$ *a*) Tenemos que existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $\mathrm{Fr}_Z(Z \cap f^{-1}[B]) = Z \cap f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y B]$ para todo $B \subseteq Y$. Veremos que $f|_Z$ es abierta. Sea $W \in \tau_Z$. Supongamos que existe $y \in f(W)$ tal que $y \notin \mathrm{Int}_Y f(W)$. Entonces $y \in \mathrm{Cl}_Y f(W) \setminus \mathrm{Int}_Y f(W) = \mathrm{Fr}_Y f(W)$. Por otro lado, existe $x \in W$ tal que $f(x) = y$. Dado que $W \subseteq Z$, entonces $x \in Z \cap f^{-1}[\mathrm{Fr}_Y f(W)]$. De la hipótesis se sigue que $x \in \mathrm{Fr}_Z(Z \cap f^{-1}[f(W)]) = \mathrm{Cl}_Z(Z \cap f^{-1}[f(W)]) \setminus \mathrm{Int}_Z(Z \cap f^{-1}[f(W)])$. Esto implica que $x \notin W$, lo cual es una contradicción. Por tanto $f(W) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(W)$. Concluimos que f es inductivamente abierta.

$\square$

2.3.3. Caracterización de funciones casi abiertas

Teorema 2.19. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *f es casi abierta.*

b) *Para todo $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que si $B \subseteq Y$ y $x \in \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$, entonces $y \in \mathrm{Int}_Y B$.*

c) *Para todo $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que si $B \subseteq Y$ y $y \in \mathrm{Cl}_Y B$, entonces $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$.*

d) *Para todo $y \in Y$, existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que si $B \subseteq Y$ y $y \in \mathrm{Fr}_Y B$, entonces $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[B]$.*

Demostración. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Supongamos que f es casi abierta. Sea $y \in Y$. Sabemos que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$ para todo $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Veamos que x cumple la condición deseada. Sea $B \subseteq Y$ tal que $x \in \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$. Entonces, de la hipótesis se sigue que $y \in \mathrm{Int}_Y f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B]) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(f^{-1}[B]) = \mathrm{Int}_Y B$.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $y \in Y$. Sabemos que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que si $B \subseteq Y$ y $x \in \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$, entonces $y \in \mathrm{Int}_Y B$. Afirmamos que x satisface el inciso $c)$. Sea $B \subseteq Y$ tal que $y \in \mathrm{Cl}_Y B$ y $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Dado que $x \in U \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[f(U)]$, la hipótesis garantiza que $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Por tanto $\mathrm{Int}_Y f(U) \cap B \neq \emptyset$, con lo que se tiene que $U \cap f^{-1}[B] \neq \emptyset$. Concluimos que $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$.

$c) \Rightarrow d)$ Sea $y \in Y$. Tenemos que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$ para todo $B \subseteq Y$ tal que $y \in \mathrm{Cl}_Y B$. Sea $B \subseteq Y$ tal que $y \in \mathrm{Fr}_Y B$. Entonces $y \in \mathrm{Cl}_Y B \cap \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus B)$. De lo anterior se obtiene que $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \cap \mathrm{Cl}_X f^{-1}[Y \setminus B] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[B])$. Es decir, $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[B]$.

$d) \Rightarrow a)$ Sea y en Y. De la hipótesis se tiene que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[B]$ siempre que $y \in \mathrm{Fr}_Y B$ y $B \subseteq Y$. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Supongamos que $y \notin \mathrm{Int}_Y f(U)$. Entonces $y \in \mathrm{Cl}_Y f(U) \setminus \mathrm{Int}_Y f(U) = \mathrm{Fr}_Y f(U)$. Así que $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[f(U)] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[f(U)] \setminus \mathrm{Int}_X f^{-1}[f(U)]$. Esto implica que $x \notin U$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Esto demuestra que f es casi abierta.

$\square$

2.3.4. Caracterización de funciones pseudo abiertas

Teorema 2.20. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) f es pseudo abierta.

b) $\mathrm{Int}_Y B = \{y \in Y : f^{-1}[y] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]\}$ para todo $B \subseteq Y$.

c) $\mathrm{Cl}_Y B = f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B])$ para todo $B \subseteq Y$.

d) $\mathrm{Fr}_Y B \subseteq f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[Y \setminus B])$ para todo $B \subseteq Y$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Supongamos que f es pseudo abierta. Sean $B \subseteq Y$ y $y \in \mathrm{Int}_Y B$. Entonces $f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Int}_Y B] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$. Esto implica que $\mathrm{Int}_Y B \subseteq \{y \in Y : f^{-1}[y] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]\}$. Por otro lado, sea $y \in Y$ tal que $f^{-1}[y] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$. Por ser f pseudo abierta se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B]) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(f^{-1}[B]) = \mathrm{Int}_Y B$. Por tanto, se satisface que

$\mathrm{Int}_Y B = \{y \in Y : f^{-1}[y] \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]\}$.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sean $B \subseteq Y$ y $y \in Y$ tal que $y \in \mathrm{Cl}_Y B$. Supongamos que $f^{-1}[y] \cap \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] = \emptyset$. Entonces $f^{-1}[y] \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] = \mathrm{Int}_X(X \setminus f^{-1}[B]) = \mathrm{Int}_X f^{-1}[Y \setminus B]$. De *b*), se obtiene que $y \in \mathrm{Int}_Y(Y \setminus B)$. Esto y la elección de y implican que $\mathrm{Int}_Y(Y \setminus B) \cap B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, $f^{-1}[y] \cap \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \neq \emptyset$. Por lo que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$. Así, $f(x) = y \in f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B])$. Por otra parte, la continuidad de f nos garantiza que $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]$. Por consiguiente, $f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]) \subseteq f(f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y B]) = \mathrm{Cl}_Y B$. Concluimos que $\mathrm{Cl}_Y B = f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B])$.

c) $\Rightarrow$ *d*) Sean $B \subseteq Y$ y $y \in \mathrm{Fr}_Y B$. Entonces $y \in \mathrm{Cl}_Y B \cap \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus B)$. De *c*), se sigue que $y \in f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[Y \setminus B])$. Lo que implica que $\mathrm{Fr}_Y B \subseteq f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[Y \setminus B])$.

d) $\Rightarrow$ *a*) Sean $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}[y] \subseteq U$. Supongamos que $y \notin \mathrm{Int}_Y f(U)$, entonces $y \in \mathrm{Cl}_Y f(U) \setminus \mathrm{Int}_Y f(U) = \mathrm{Fr}_Y f(U)$. Esto y la hipótesis implican que $f^{-1}[y] \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[f(U)]) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que $x \in \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[f(U)])$. Dado que $x \in U$, se tiene que $U \cap (X \setminus f^{-1}[f(U)]) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Concluimos que f es pseudo abierta.

$\square$

2.3.5. Caracterización de funciones cociente

Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Definimos $\mathcal{U} = \{U \in \tau_X : f^{-1}[f(U)] = U\}$ y $\mathcal{O} = \{O \subseteq X : O$ es subconjunto cerrado de X y $f^{-1}[f(O)] = O\}$.

Lema 2.21. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y $A \subseteq X$. Entonces $A \in \mathcal{U}$ si y solo si $X \setminus A \in \mathcal{O}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $A \in \mathcal{U}$. Entonces $A \in \tau_X$ y $f^{-1}[f(A)] =$

A. Así $X \setminus A$ es cerrado en X. Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(X \setminus A)] = & \; f^{-1}[f(f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[f(A)])] \\ = & \; f^{-1}[f(f^{-1}[Y \setminus f(A)])] \\ = & \; f^{-1}[Y \setminus f(A)] \\ = & \; f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[f(A)] \\ = & \; X \setminus A. \end{aligned}$$

Concluimos que $X \setminus A \in \mathcal{O}$.

$\Leftarrow$) Sea $A \subseteq X$ tal que $X \setminus A \in \mathcal{O}$. Así $f^{-1}[f(X \setminus A)] = X \setminus A$ y $X \setminus (X \setminus A) = A \in \tau_X$. Además se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(A)] = & \; f^{-1}[f(X \setminus (X \setminus A))] \\ = & \; f^{-1}[f(f^{-1}[Y \setminus f(X \setminus A)])] \\ = & \; f^{-1}[Y \setminus f(X \setminus A)] \\ = & \; f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[f(X \setminus A)] \\ = & \; X \setminus f^{-1}[f(X \setminus A)] \\ = & \; X \setminus (X \setminus A) \\ = & \; A. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que $A \in \mathcal{U}$. □

Lema 2.22. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topologícos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) f es cociente.

b) $\tau_Y = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$.

c) El conjunto $\mathcal{C}_Y$ de cerrados en Y es $\{f(O) : O \in \mathcal{O}\}$.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces $f^{-1}[f(U)] = U$ y $f(U) \subseteq Y$ es tal que $f^{-1}[f(U)] \in \tau_X$. Dado que f es cociente, se tiene que $f(U) \in \tau_Y$. Por otro lado, sea $V \in \tau_Y$. De la continuidad de f se sigue que $f^{-1}[V] \in \tau_X$. Notemos que $f^{-1}[f(f^{-1}[V])] = f^{-1}[V]$. Por tanto $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}$. Además $f(f^{-1}[V]) = V$. Esto implica que $V \in \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $O \in \mathcal{O}$. Del Lema 2.21 se sigue que $X \setminus O \in \mathcal{U}$. Observe que $X \setminus O = f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[f(O)] = f^{-1}[Y \setminus f(O)]$. De $b)$ se obtiene que

$f(f^{-1}[Y \setminus f(O)]) = Y \setminus f(O) \in \tau_Y$. Lo que implica que $f(O)$ es un subconjunto cerrado de Y. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{C}_Y$, entonces $Y \setminus Q \in \tau_Y$. Por lo que $Y \setminus Q = f(U)$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Del Lema 2.21 se tiene que $X \setminus U \in \mathcal{O}$. Además $f(X \setminus U) = f(f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[f(U)]) = f(f^{-1}[Y \setminus f(U)]) = Y \setminus f(U) = Y \setminus (Y \setminus Q) = Q$. Con lo que se concluye que $Q \in \{f(O) : O \in \mathcal{O}\}$.

c) $\Rightarrow$ *a*) Finalmente, sea $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}[V] \in \tau_X$. Notemos que $X \setminus f^{-1}[V] = f^{-1}[Y \setminus V]$ es cerrado en X y $f^{-1}[f(f^{-1}[Y \setminus V])] = f^{-1}[Y \setminus V]$. Así $f^{-1}[Y \setminus V] \in \mathcal{O}$. De *c*) se sigue que $f(f^{-1}[Y \setminus V]) = Y \setminus V \in \mathcal{C}_Y$. Por lo tanto, $V \in \tau_Y$, es decir, f es una función cociente. $\square$

Teorema 2.23. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones: son equivalentes*

a) *f es cociente.*

b) $\mathrm{Int}_Y B = \{y \in B :$ *existe* $U \in \mathcal{U}$ *tal que* $f^{-1}[y] \subseteq U \subseteq f^{-1}[B]\}$ *para todo* $B \subseteq Y$.

c) $\mathrm{Cl}_Y B = \{y \in Y : f^{-1}[y] \cap O \neq \emptyset$ *para todo* $O \in \mathcal{O}$ *tal que* $f^{-1}[B] \subseteq O\}$ *para todo* $B \subseteq Y$.

d) $\mathrm{Fr}_Y B \subseteq \{y \in Y : f^{-1}[y] \cap O \neq \emptyset$ *para todo* $O \in \mathcal{O}$ *tal que* $X \setminus f^{-1}[B] \subseteq O\}$ *para todo* $B \subseteq Y$.

Demostración. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Supongamos que f es cociente. Sea $B \subseteq Y$ y sea $y \in \mathrm{Int}_Y B$. Del Lema 2.22, se tiene que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mathrm{Int}_Y B = f(U)$. Por tanto, $f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[f(U)] = U \subseteq f^{-1}[B]$. Por otro lado, sea $y \in B$ tal que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}[y] \subseteq U \subseteq f^{-1}[B]$. Entonces, $y \in f(U) \subseteq B$. Del Lema 2.22 se sigue que $f(U) \in \tau_Y$. Esto implica que $y \in \mathrm{Int}_Y B$. Por tanto, $\mathrm{Int}_Y B = \{y \in B : \text{existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } f^{-1}[y] \subseteq U \subseteq f^{-1}[B]\}$.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sean $B \subseteq Y$, $O \in \mathcal{O}$ tal que $f^{-1}[B] \subseteq O$ y $y \in \mathrm{Cl}_Y B$. Supongamos que $f^{-1}[y] \cap O = \emptyset$. Entonces $f^{-1}[y] \subseteq X \setminus O \subseteq X \setminus f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus B]$. De la hipótesis y del Lema 2.21, se sigue que $y \in \mathrm{Int}_Y(Y \setminus B) = Y \setminus \mathrm{Cl}_Y B$, lo que nos lleva a una contradicción. Por tanto, $f^{-1}[y] \cap O \neq \emptyset$. Por otro lado, sean $y \in Y$ tal que $f^{-1}[y] \cap O \neq \emptyset$ para todo $O \in \mathcal{O}$ tal que $f^{-1}[B] \subseteq O$ y $W \in \tau_Y$ tal que $y \in W$. Supongamos que $W \cap B = \emptyset$. Entonces $B \subseteq Y \setminus W$, por lo que $f^{-1}[B] \subseteq X \setminus f^{-1}[W]$. Por otra parte, de *b*) se tiene que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$f^{-1}[y] \subseteq U \subseteq f^{-1}[W]$. Esto implica que $f^{-1}[B] \subseteq X \setminus f^{-1}[W] \subseteq X \setminus U \in \mathcal{O}$. Por tanto, $f^{-1}[y] \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $y \in \mathrm{Cl}_Y B$.

c) $\Rightarrow$ *d*) Sea $B \subseteq Y$. Entonces $\mathrm{Fr}_Y B = \mathrm{Cl}_Y B \cap \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus B)$. De *c*) concluimos que $\mathrm{Fr}_Y B \subseteq \{y \in Y : f^{-1}[y] \cap O \neq \emptyset$ para todo $O \in \mathcal{O}$ tal que $X \setminus f^{-1}[B] \subseteq O\}$.

d) $\Rightarrow$ *a*) Sean $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}[V] \in \tau_X$ y $y \in V$. Supongamos que $y \notin \mathrm{Int}_Y V$. Así, $y \in \mathrm{Cl}_Y V \setminus \mathrm{Int}_Y V = \mathrm{Fr}_Y V$. Note que $X \setminus f^{-1}[V] \in \mathcal{O}$. Esto y el inciso *d*) implican que $f^{-1}[y] \cap (X \setminus f^{-1}[V]) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto $y \in \mathrm{Int}_Y V$, con lo que se tiene $V \subseteq \mathrm{Int}_Y V$. Concluimos que f es una función cociente. $\square$

2.3.6. Caracterización de funciones semi abiertas

Teorema 2.24. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) f es semi abierta.

b) Si $B \subseteq Y$ es tal que $\mathrm{Int}_Y B = \emptyset$, entonces $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] = \emptyset$.

c) Si B es un subconjunto denso en Y, entonces $f^{-1}[B]$ es denso en X.

d) Si $B \subseteq Y$ es tal que $\mathrm{Fr}_Y B = \mathrm{Cl}_Y B$, entonces $\mathrm{Fr}_X f^{-1}[B] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$.

Demostración. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Sea $B \subseteq Y$ tal que $\mathrm{Int}_Y B = \emptyset$. Si $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] \neq \emptyset$, entonces por ser f semi abierta se tiene que $\emptyset \neq \mathrm{Int}_Y f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[B]) \subseteq \mathrm{Int}_Y f(f^{-1}[B]) = \mathrm{Int}_Y B$, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] = \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sea $B \subseteq Y$ tal que $\mathrm{Cl}_Y B = Y$. Como $\mathrm{Cl}_Y B = Y \setminus \mathrm{Int}_Y(Y \setminus B)$, entonces $\mathrm{Int}_Y(Y \setminus B) = \emptyset$. De *a*) se sigue que $\mathrm{Int}_X f^{-1}[Y \setminus B] = \mathrm{Int}_X(X \setminus f^{-1}[B]) = \emptyset$. Esto implica que $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] = X \setminus \mathrm{Int}_X(X \setminus f^{-1}[B]) = X$.

$c) \Rightarrow d)$ Sea $B \subseteq Y$ tal que $\mathrm{Fr}_Y B = \mathrm{Cl}_Y B$. Dado que $\mathrm{Fr}_Y B = \mathrm{Cl}_Y B \setminus \mathrm{Int}_Y B$, se tiene que $\mathrm{Int}_Y B = \emptyset$. Por tanto, $\mathrm{Cl}_Y(Y \setminus B) = Y \setminus \mathrm{Int}_Y B = Y$. De esto y de $c)$ se obtiene que $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[Y \setminus B] = \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[B]) = X$. Como $\mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[B]) = X \setminus \mathrm{Int}_X f^{-1}[B]$. Entonces $\mathrm{Int}_X f^{-1}[B] = \emptyset$. Concluimos que $\mathrm{Fr}_X f^{-1}[B] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$.

$d) \Rightarrow a)$ Sea $U \in \tau_X^*$. Supongamos que $\mathrm{Int}_Y f(U) = \emptyset$. Entonces $\mathrm{Fr}_Y f(U) = \mathrm{Cl}_Y f(U) \setminus \mathrm{Int}_Y f(U) = \mathrm{Cl}_Y f(U)$. Sabemos que $\mathrm{Fr}_X f^{-1}[f(U)] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[f(U)] \setminus \mathrm{Int}_X f^{-1}[f(U)]$. Del inciso $d)$ se deduce que $\mathrm{Int}_X f^{-1}[f(U)] = \emptyset$. Dado que $U \subseteq f^{-1}[f(U)]$, obtenemos que $U = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por tanto, $\mathrm{Int}_Y f(U) \neq \emptyset$. Esto prueba que f es semi abierta.

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que una función semi abierta, aún siendo inyectiva no necesariamente es abierta.

Ejemplo 2.25. *Consideremos a $X = [0, 2\pi)$, $Y = \{(sen\ t, cos\ t) : t \in [0, 2\pi)\}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Sea $f : X \to Y$ dada por $f(t) = (sen\ t, cos\ t)$.*

Nótese que f es inyectiva. Con argumentos similares al Ejemplo 2.15 se obtiene que f es semi abierta, pero no abierta.

2.3.7. Caracterización de funciones denso abiertas

Teorema 2.26. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *f es denso abierta.*

b) *$f(U) \subseteq \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y f(U))$ para todo $U \in \tau_X$.*

c) *$\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W] = f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]$ para todo $W \in \tau_Y$.*

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Sea $U \in \tau_X$. Dado que f es denso abierta, se tiene que existe $V \in \tau_Y$ tal que $\mathrm{Cl}_V f(U) = V$. Entonces $f(U) \subseteq \mathrm{Cl}_V f(U) = V \cap \mathrm{Cl}_Y f(U) = V$. Lo que implica que $f(U) \subseteq V \subseteq \mathrm{Cl}_Y f(U)$. Así, $f(U) \subseteq \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y f(U))$.

b) $\Rightarrow$ *c*) Sea $W \in \tau_Y$. Por la continuidad de f se tiene que $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]$. Por otro lado, sean $x \in f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. De esto y de *b*) se obtiene que $f(x) \in f(U) \subseteq \mathrm{Int}_Y \mathrm{Cl}_Y f(U)$. La elección de x garantiza que $W \cap \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y f(U)) \subseteq W \cap \mathrm{Cl}_Y f(U) \neq \emptyset$. Por tanto, existe $z \in \mathrm{Cl}_Y f(U)$ tal que $z \in W$. Dado que $W \in \tau_Y$, se tiene que $W \cap f(U) \neq \emptyset$ y así $U \cap f^{-1}[W] \neq \emptyset$. Esto prueba que $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[W]$. Por tanto, $f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W] \subseteq \mathrm{Cl}_X f^{-1}[W]$. Concluimos que $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W] = f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]$.

c) $\Rightarrow$ *a*) Sean $U \in \tau_X$ y $V = \mathrm{Int}_Y \mathrm{Cl}_Y f(U)$. Veremos que $f(U) \subseteq V$. Supongamos que existe $y \in f(U)$ tal que $y \notin V$. Así, de la Proposición 1.11 se sigue que $y \in Y \setminus \mathrm{Int}_Y \mathrm{Cl}_Y f(U) = \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus \mathrm{Cl}_Y f(U))$. De la hipótesis se obtiene que $f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y(Y \setminus \mathrm{Cl}_Y f(U))] = \mathrm{Cl}_X(f^{-1}[Y \setminus \mathrm{Cl}_Y f(U)]) = \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y f(U)]) \subseteq \mathrm{Cl}_X(X \setminus f^{-1}[f(U)])$. Esto nos lleva a que $U \cap (X \setminus f^{-1} f(U)) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $f(U) \subseteq V$. Dado que $\mathrm{Cl}_V f(U) = V$, se concluye que f es denso abierta.

$\square$

La función $I_X : (X, \tau_{con}) \to (X, \tau_{cof})$ del Ejemplo 2.16 nos muestra que una función denso abierta, aún siendo inyectiva no necesariamente es abierta.

Capítulo 3

Operaciones invariantes de formas débiles de funciones abiertas

En este capítulo veremos como la propiedad de ser función abierta, inductivamente abierta, casi abierta, pseudo abierta, cociente, semi abierta y denso abierta se preserva en la generación de nuevas funciones.

3.1. Suma y producto de espacios topológicos

Sean I un conjunto de índices, $\{(X_\alpha, \tau_{X_\alpha}) : \alpha \in I\}$, $\{(Y_\alpha, \tau_{Y_\alpha}) : \alpha \in I\}$ familias de espacios topológicos ajenos a pares y $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de funciones.

Definimos la ***suma topológica*** de la familia $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ como $(\bigoplus X_\alpha, \tau_{\bigoplus X_\alpha})$, donde $\bigoplus X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ y $U \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$ si y solo si $U \cap X_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Sea $\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ la función dada por $\overline{f}(x) = f_\alpha(x)$, si $x \in X_\alpha$.

Lema 3.1. *Sean J un conjunto de índices y $\{(X_\beta, \tau_{X_\beta}) : \beta \in J\}$ una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos. Si $\beta_0 \in J$ y $V \in \tau_{X_{\beta_0}}$, entonces $V \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$.*

Demostración. Sabemos que $V \subseteq X_{\beta_0}$ y $X_{\beta_0} \cap X_\beta = \emptyset$ para toda $\beta \in J$ tal que $\beta \neq \beta_0$. Entonces $V \cap X_\beta = V$ si $\beta = \beta_0$ ó $V \cap X_\beta = \emptyset$ si $\beta \neq \beta_0$. Por lo que $V \cap X_\beta \in \tau_{X_\beta}$ para todo $\beta \in J$. Esto prueba que $V \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$. □

Lema 3.2. *Sean J un conjunto de índices, $\{(X_\beta, \tau_{X_\beta}) : \beta \in J\}$ y $\{(Y_\beta, \tau_{Y_\beta}) : \beta \in J\}$ familias de espacios topológicos ajenos a pares y $\{f_\beta : X_\beta \to Y_\beta : \beta \in J\}$ una familia de funciones. Entonces $\overline{f}(U) = \bigcup\limits_{\beta \in J} f_\beta(U \cap X_\beta)$ para todo subconjunto U de $\bigoplus X_\beta$.*

Demostración. Sean $U \subseteq \bigoplus X_\beta$ y $y \in \overline{f}(U)$. Entonces existe $x \in U$ tal que $\overline{f}(x) = y$. Notemos que $x \in U \cap X_{\beta_0} \subseteq X_{\beta_0}$ para algún $\beta_0 \in J$. Por tanto, $y = \overline{f}(x) = f_{\beta_0}(x) \in f_{\beta_0}(U \cap X_{\beta_0})$. Con esto se tiene que $\overline{f}(U) \subseteq \bigcup\limits_{\beta \in J} f_\beta(U \cap X_\beta)$. Por otro lado, sea $y \in \bigcup\limits_{\beta \in J} f_\beta(U \cap X_\beta)$. Entonces $y \in f_{\beta_0}(U \cap X_{\beta_0})$ para algún $\beta_0 \in J$. Por lo que existe $x \in U \cap X_{\beta_0}$ de modo que $f_{\beta_0}(x) = y$. Dado que $x \in U$ y $\overline{f}(x) = f_{\beta_0}(x)$, se tiene que $y \in \overline{f}(U)$. Esto implica que $\bigcup\limits_{\beta \in J} f_\beta(U \cap X_\beta) \subseteq \overline{f}(U)$. Lo que prueba la igualdad.

□

Lema 3.3. *Sean J un conjunto de índices, $\{(X_\beta, \tau_{X_\beta}) : \beta \in J\}$ y $\{(Y_\beta, \tau_{Y_\beta}) : \beta \in J\}$ familias de espacios topológicos ajenos a pares y $\{f_\beta : X_\beta \to Y_\beta : \beta \in J\}$ una familia de funciones suprayectivas. Si $\gamma \in J$ y $V \subseteq Y_\gamma$, entonces $f_\gamma^{-1}[V] = \overline{f}^{-1}[V]$.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y_\gamma$. Se tiene que $\overline{f}^{-1}[V] \subseteq X_\gamma$. En caso contrario, existirían $\beta_0 \in I$, con $\beta_0 \neq \gamma$ y $x \in \overline{f}^{-1}[V]$ tales que $x \in X_{\beta_0}$. Así $\overline{f}(x) \in \overline{f}(X_{\beta_0}) = f_{\beta_0}(X_{\beta_0}) = Y_{\beta_0}$. Con lo que $f(x) \in V \cap Y_{\beta_0}$. Esto nos lleva a que $Y_\gamma \cap Y_{\beta_0} \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Notemos que $\overline{f}$ es suprayectiva. Por tanto, $V = \overline{f}(\overline{f}^{-1}[V]) = f_\gamma(\overline{f}^{-1}[V])$. Esto implica que $\overline{f}^{-1}[V] \subseteq f_\gamma^{-1}[f_\gamma(\overline{f}^{-1}[V])] = f_\gamma^{-1}[V]$. Por otro lado, como $f_\gamma^{-1}[V] \subseteq X_\gamma$, entonces $\overline{f}(f_\gamma^{-1}[V]) = f_\gamma(f_\gamma^{-1}[V]) = V$. De la igualdad anterior se obtiene que $f_\gamma^{-1}[V] \subseteq \overline{f}^{-1}[\overline{f}(f_\gamma^{-1}[V])] = \overline{f}^{-1}[V]$. Concluimos que $f_\gamma^{-1}[V] = \overline{f}^{-1}[V]$.

□

Lema 3.4. *Sean J un conjunto de índices y $\{(X_\beta, \tau_{X_\beta}) : \beta \in J\}$ una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos. Si $\beta_0 \in J$ y $D \subseteq X_{\beta_0}$, entonces:*

a) $\mathrm{Int}_{X_{\beta_0}} D = \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\beta} D$
b) $\mathrm{Cl}_{X_{\beta_0}} D = \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta} D$

Demostración. *a*) Sea $x \in \mathrm{Int}_{X_{\beta_0}} D$. Entonces existe $W \in \tau_{X_{\beta_0}}$ tal que $x \in W \subseteq D$. Del Lema 3.1 se tiene que $W \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$. Por tanto, $x \in \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\beta} D$. Por otro lado, sea $x \in \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\beta} D$. Entonces existe $W \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$ tal que $x \in W \subseteq D$. Dado que $D \subseteq X_{\beta_0}$, se tiene que $W = W \cap X_{\beta_0} \in \tau_{X_{\beta_0}}$. Esto implica que $x \in \mathrm{Int}_{X_{\beta_0}} D$. De lo anterior se concluye que $\mathrm{Int}_{X_{\beta_0}} D = \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\beta} D$.

b) Sean $x \in \mathrm{Cl}_{X_{\beta_0}} D$ y $U \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$ tal que $x \in U$. Dado que $D \subseteq X_{\beta_0}$, se tiene que $x \in U \cap X_{\beta_0} \in \tau_{X_{\beta_0}}$. Esto implica que $\emptyset \neq (U \cap X_{\beta_0}) \cap D \subseteq U \cap D$. Por tanto, $x \in \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta} D$. Por otro lado, sea $x \in \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta} D$ y $W \in \tau_{X_{\beta_0}}$ tal que $x \in W$. Del Lema 3.1, se obtiene que $W \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$. Por tanto, $W \cap D \neq \emptyset$. Esto implica que $x \in \mathrm{Cl}_{X_{\beta_0}} D$. Concluimos que $\mathrm{Cl}_{X_{\beta_0}} D = \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta} D$.

$\square$

Lema 3.5. *Sean J un conjunto de índices, $\{(X_\beta, \tau_{X_\beta}) : \beta \in J\}$ una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos y $D_\beta \subseteq X_\beta$ para cada $\beta \in J$. Se tiene que* $\mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta}(\bigcup_{\beta \in J} D_\beta) = \bigcup_{\beta \in J} \mathrm{Cl}_{X_\beta} D_\beta$.

Demostración. Sea $z \in \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta}(\bigcup_{\beta \in J} D_\beta)$. Sabemos que $z \in X_\gamma$ para algún $\gamma \in J$. Veremos que $z \in \mathrm{Cl}_{X_\gamma} D_\gamma$. Sea $U \in \tau_{X_\gamma}$ tal que $z \in U$. Del Lema 3.1 se tiene que $U \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$. Por tanto, $U \cap (\bigcup_{\beta \in J} D_\beta) \neq \emptyset$. Dado que $U \subseteq X_\gamma$ y $X_\gamma \cap X_\beta = \emptyset$ para todo $\beta \in J$ tal que $\beta \neq \gamma$, concluimos que $U \cap D_\gamma \neq \emptyset$. Por tanto, $z \in \bigcup_{\beta \in J} \mathrm{Cl}_{X_\beta} D_\beta$, con lo que $\mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta}(\bigcup_{\beta \in J} D_\beta) \subseteq \bigcup_{\beta \in J} \mathrm{Cl}_{X_\beta} D_\beta$. Por otro lado, sea $w \in \bigcup_{\beta \in J} \mathrm{Cl}_{X_\beta} D_\beta$. Por lo que existe $\gamma \in J$ tal que $w \in \mathrm{Cl}_{X_\gamma} D_\gamma$. Sea $U \in \tau_{\bigoplus X_\beta}$ tal que $w \in U$. Nótese que $w \in U \cap X_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$. Por tanto, $\emptyset \neq D_\gamma \cap (U \cap X_\gamma) \subseteq U \cap D_\gamma \subseteq U \cap (\bigcup_{\beta \in J} D_\beta)$, es decir, $w \in \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta}(\bigcup_{\beta \in J} D_\beta)$. Con esto concluimos que $\bigcup_{\beta \in J} \mathrm{Cl}_{X_\beta} D_\beta \subseteq \mathrm{Cl}_{\bigoplus X_\beta}(\bigcup_{\beta \in J} D_\beta)$, lo que demuestra la igualdad.

$\square$

Sean I un conjunto de índices, $\gamma \in I$, $\{(X_\alpha, \tau_{X_\alpha}) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos, $P = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ y $\pi_\gamma : P \to X_\gamma$ dada por $\pi_\gamma((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = x_\gamma$. La topología τ_P, generada por la subbase de todos los subconjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}]$, con $n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in I$ y $U_{\alpha_i} \in \tau_{X_{\alpha_i}}$ para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$, es conocida como ***topología producto*** y a la pareja (P, τ_P) se le denomina ***espacio producto***. A π_γ se le conoce como la ***función proyección*** sobre X_γ.

Proposición 3.6. *La función $\pi_\gamma : (P, \tau_P) \to (X_\gamma, \tau_{X_\gamma})$ es abierta para todo $\gamma \in I$.*

Nótese que π_γ es suprayectiva. Ahora, sea $U_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$. Por mera definición se tiene que $\pi_\gamma^{-1}[U_\gamma]$ es un subconjunto abierto del espacio producto. Así que π_γ es una función continua. Sea $B \subseteq Y_\gamma$ De la Proposición 1.16 se sigue que $\pi_\gamma^{-1}[\mathrm{Int}_{Y_\gamma} B] \subseteq \mathrm{Int}_P \pi_\gamma^{-1}[B]$. Por otro lado, sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathrm{Int}_P \pi_\gamma^{-1}[B]$. Por lo que existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_{\alpha_i} \in \tau_{X_{\alpha_i}}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ tales que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}] \subseteq \pi_\gamma^{-1}[B]$. De [4, pág 98] tenemos que $\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}] = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod\{X_\alpha : \alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}\}$. Por tanto, $\pi_\gamma(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}]) = X_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$ ó $\pi_\gamma(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}]) = U_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$ si $\gamma \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Dado que $\pi_\gamma((x_\alpha)_{\alpha\in I}) \in \pi_\gamma(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}]) \subseteq B$, se tiene que $\pi_\gamma((x_\alpha)_{\alpha\in I}) \in \mathrm{Int}_{Y_\gamma} B$. Con lo que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \pi_\gamma^{-1}[\mathrm{Int}_{Y_\gamma} B]$. Lo anterior prueba que $\pi_\gamma^{-1}[\mathrm{Int}_{Y_\gamma} B] = \mathrm{Int}_P \pi_\gamma^{-1}[B]$. Del Teorema 2.17 obtenemos que π_γ es una función abierta.

Sean I un conjunto de índices, $\{(X_\alpha, \tau_{X_\alpha}) : \alpha \in I\}$, $\{(Y_\alpha, \tau_{Y_\alpha}) : \alpha \in I\}$ familias de espacios topológicos y $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de funciones. Sean $P = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$, $Q = \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ y τ_P y τ_Q la topología producto sobre P y Q, respectivamente. Definimos $\widehat{f} : P \to Q$ dada por $\widehat{f}((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in I}$. Sean $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$ y $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ las funciones proyección. Observe que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$.

Para nuestros fines, consideraremos $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ función continua y suprayectiva para todo $\alpha \in I$, a menos que se especifique cualquier otra cosa.

3.2. Operaciones invariantes de funciones abiertas

Teorema 3.7. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) *Si f y g son funciones abiertas, entonces $g \circ f$ es abierta.*

b) *Si $g \circ f$ es abierta, entonces g es abierta.*

c) *$f : X \to Y$ es abierta si y solo si $f|_A : A \to f(A)$ es abierta para todo $A \in \tau_X$.*

d) *$\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es abierta si y solo si f_α es abierta para todo $\alpha \in I$.*

e) *$\widehat{f} : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ es abierta si y solo si f_α es abierta para todo $\alpha \in I$.*

Demostración. *a*) Supongamos que f y g son funciones abiertas. Sea $V \subseteq Z$. Sabemos por el Teorema 2.17 que $\mathrm{Int}_Z V = g(\mathrm{Int}_Y g^{-1}[V])$. De esto y de la hipótesis sobre f se sigue que $\mathrm{Int}_Z V = g(f(\mathrm{Int}_X f^{-1}[g^{-1}[V]])) = g \circ f(\mathrm{Int}_X (g \circ f)^{-1}[V])$. Lo que demuestra que $g \circ f$ es abierta.

b) Supongamos que $g \circ f$ es abierta. Sea $V \in \tau_Y$. De la continuidad de f se obtiene $f^{-1}[V] \in \tau_X$. Por tanto, $g \circ f(f^{-1}[V]) = g(V) \in \tau_Z$. Es decir, g es una función abierta.

c) $\Rightarrow$) Sean f abierta, A un subconjunto abierto de X y $V \in \tau_A$. Entonces $V = A \cap U$ para algún $U \in \tau_X$. Notemos que V es un subconjunto abierto de X. Por tanto, $f|_A(V) = f(V) \in \tau_Y$. Dado que $f|_A(V) \subseteq f(A)$, se tiene que $f|_A(V) \in \tau_{f(A)}$. Concluimos que $f|_A$ es abierta.

$\Leftarrow$) Dado que $X \in \tau_X$, de la hipótesis se sigue que $f|_X = f$ es una función abierta.

d) $\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{f}$ es abierta. Sean $\gamma \in I$ y $U_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$. El Lema 3.1 garantiza que $U_\gamma \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$. Por tanto $\overline{f}(U_\gamma) = f_\gamma(U_\gamma) \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. Con lo que se tiene, $f_\gamma(U_\gamma) \cap Y_\gamma = f_\gamma(U_\gamma) \in \tau_{Y_\gamma}$. Esto demuestra que f_α es abierta para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que para cada $\alpha \in I$, f_α es abierta. Sea $U \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$. Del Lema 3.2 se sigue que para cada $\gamma \in I$, $\overline{f}(U) \cap Y_\gamma = (\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(U \cap X_\alpha)) \cap Y_\gamma = f_\gamma(U \cap X_\gamma) \in \tau_{Y_\gamma}$. Por tanto $\overline{f}(U) \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. Concluimos que $\overline{f}$ es abierta.

e) $\Rightarrow$) Supongamos que $\widehat{f}$ es abierta. Sabemos que $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ es una función abierta. Por tanto, de *a*) se tiene que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es abierta para todo $\alpha \in I$. Pero $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$. Luego, de *b*) concluimos que f_α es abierta para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_α es abierta para cada $\alpha \in I$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}] \in \tau_P$, donde $U_{\alpha_i} \in \tau_{X_{\alpha_i}}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Observe que:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(U) &= \widehat{f}(\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}[U_{\alpha_i}]) \\
&= \widehat{f}(U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod\{X_\alpha : \alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}\}) \\
&= f_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \times \cdots \times f_{\alpha_n}(U_{\alpha_n}) \times \prod\{f_\alpha(X_\alpha) : \alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}\} \\
&= f_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \times f_{\alpha_2}(U_{\alpha_2}) \times \cdots \times f_{\alpha_n}(U_{\alpha_n}) \times \prod\{Y_\alpha : \alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}[f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})].
\end{aligned}$$

Dado que $f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}) \in \tau_{X_{\alpha_i}}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$, se tiene que $\widehat{f}(U) \in \tau_Q$. Concluimos que $\widehat{f}$ es una función abierta.

$\square$

3.3. Operaciones invariantes de funciones inductivamente abiertas

Teorema 3.8. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) Si f y g son funciones inductivamente abiertas, entonces $g \circ f$ es inductivamente abierta.

b) Si $g \circ f$ es inductivamente abierta, entonces g es inductivamente abierta.

c) $\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es inductivamente abierta si y solo si f_α es inductivamente abierta para todo $\alpha \in I$.

d) $\widehat{f} : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ es inductivamente abierta si y solo si f_α es inductivamente abierta para todo $\alpha \in I$.

Demostración. *a*) Supongamos que existen $W_1 \subseteq X$, $W_2 \subseteq Y$ tales que $f(W_1) = Y$, $g(W_2) = Z$ y $f|_{W_1}$ y $g|_{W_2}$ son funciones abiertas. Sea $W = W_1 \cap f^{-1}[W_2]$. De la Proposición 1.5 se sigue que $g \circ f(W) = g(f(W_1 \cap f^{-1}[W_2])) = g(Y \cap W_2) = g(W_2) = Z$. Ahora veremos que $g \circ f|_W$ es abierta. Sea U un subconjunto abierto de W. Entonces existe $V \in \tau_X$ tal que $U = V \cap W = V \cap (W_1 \cap f^{-1}[W_2])$. Esto y la Proposición 1.5 implican que $g \circ f|_W(U) = g \circ f(V \cap (W_1 \cap f^{-1}[W_2])) = g \circ f((V \cap W_1) \cap f^{-1}[W_2]) = g(f(V \cap W_1) \cap W_2)$. Dado que $V \cap W_1 \in \tau_{W_1}$, se tiene que $f(V \cap W_1) \cap W_2 \in \tau_{W_2}$. Por tanto, $g \circ f(U) = g(f(V \cap W_1) \cap W_2) \in \tau_Z$. Lo anterior prueba que $g \circ f$ es inductivamente abierta.

b) Supongamos que existe $W \subseteq X$ tal que $g \circ f(W) = Z$ y $g \circ f|_W$ es abierta. Veremos que $g|_{f(W)}$ es abierta. Sea $U \in \tau_{f(W)}$. Entonces existe $V \in \tau_Y$ tal que $U = V \cap f(W)$. Notemos que $f^{-1}[V] \in \tau_X$. Por tanto, $f^{-1}[V] \cap W \in \tau_W$ y así, $g \circ f|_W(f^{-1}[V] \cap W) \in \tau_Z$. De la Proposición 1.5 se sigue que $g \circ f|_W(f^{-1}[V] \cap W) = g \circ f(f^{-1}[V] \cap W) = g(V \cap f(W)) = g(U) = g|_{f(W)}(U) \in \tau_Z$. Dado que $g(f(W)) = Z$, concluimos que g es inductivamente abierta.

c) $\Rightarrow$) Supongamos que existe $Z \subseteq \bigoplus X_\alpha$ tal que $\overline{f}(Z) = \bigoplus Y_\alpha$ y $\overline{f}|_Z$ es abierta. Para cada $\alpha \in I$, consideremos $Z_\alpha = Z \cap X_\alpha \subseteq X_\alpha$. Del Lema 3.2

se sigue que $\overline{f}(Z) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(Z \cap X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(Z_\alpha)$. Dado que $\overline{f}(Z) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$ y $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ para $i \neq j$, se tiene que $f_\alpha(Z_\alpha) = Y_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Dada $\gamma \in I$ y $U_\gamma \in \tau_{Z_\gamma}$, existe $V \in \tau_{X_\gamma}$ tal que $U_\gamma = V \cap Z_\gamma = V \cap (Z \cap X_\gamma) = (V \cap X_\gamma) \cap Z = V \cap Z$, el cual es un subconjunto abierto de Z, pues $V \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$. Por tanto, $\overline{f}|_Z(U_\gamma) = \overline{f}(U_\gamma) = f_\gamma(U_\gamma) \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. Así, $f_\gamma(U_\gamma) \cap Y_\gamma = f_\gamma(U_\gamma) \in \tau_{Y_\gamma}$. Esto prueba que $f_\gamma|_{Z_\gamma}$ es abierta. Concluimos que f_α es inductivamente abierta para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $\alpha \in I$ existe $Z_\alpha \subseteq X_\alpha$ tal que $f_\alpha(Z_\alpha) = Y_\alpha$ y $f_\alpha|_{Z_\alpha}$ es abierta. Sea $Z = \bigcup\limits_{\alpha\in I} Z_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. Notemos que $Z \cap X_\alpha = Z_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Esto y el Lema 3.2 implican que $\overline{f}(Z) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(Z \cap X_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha(Z_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$. Veremos que $f|_Z$ es abierta. Sea $U \in \tau_Z$. Entonces existe $V \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$ tal que $U = V \cap Z$. Del Lema 3.2 se sigue que para cada $\gamma \in I$:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}|_Z(U) \cap Y_\gamma &= \overline{f}(V \cap Z) \cap Y_\gamma \\
&= \Big[\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha((V \cap Z) \cap X_\alpha)\Big] \cap Y_\gamma \\
&= f_\gamma((V \cap Z) \cap X_\gamma) \\
&= f_\gamma((V \cap X_\gamma) \cap (Z \cap X_\gamma)) \\
&= f_\gamma((V \cap X_\gamma) \cap Z_\gamma) \\
&= f_\gamma((V \cap X_\gamma) \cap Z_\gamma).
\end{aligned}
$$

Dado que $V \cap X_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$, se tiene que $f_\gamma((V \cap X_\gamma) \cap Z_\gamma) \in \tau_{Y_\gamma}$. Por tanto, $\overline{f}|_Z(U) \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. Esto demuestra que $\overline{f}$ es inductivamente abierta.

d) $\Rightarrow$) Supongamos que $\widehat{f}$ es inductivamente abierta. Dado que $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ es abierta, del Teorema 2.1 se tiene que ρ_α es inductivamente abierta para todo $\alpha \in I$. Luego, de *a*) se sigue que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es inductivamente abierta. Sabemos que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$. De *b*) concluimos que f_α es inductivamente abierta para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada $\alpha \in I$, existe $Z_\alpha \subseteq X_\alpha$ tal que $f_\alpha(Z_\alpha) = Y_\alpha$ y $f_\alpha|_{Z_\alpha}$ es abierta. Sean $Z = \prod\limits_{\alpha\in I} Z_\alpha$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in Q$. Entonces para cada $\alpha \in I$ existe $x_\alpha \in Z_\alpha$ tal que $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$. Así, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in Z$ y $\widehat{f}((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$. Esto implica que $Q \subseteq \widehat{f}(Z)$ y por tanto, $\widehat{f}(Z) = Q$. En seguida probaremos que $\widehat{f}|_Z$ es abierta. Sean $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i = 1, 2, ..., n$, $V_{\alpha_i} \in \tau_{X_{\alpha_i}}$ tal que $V = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ y $U = Z \cap V \in \tau_Z$. Veamos que $\widehat{f}(U) = \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i}))$. Sea $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \widehat{f}(U)$. Entonces existe $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in Z \cap V$ tal que $\widehat{f}((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$. Por tanto, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in Z$ y $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) = V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2} \times \cdots \times V_{\alpha_n} \times \prod\{X_\alpha : \alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}\}$. Esto implica que $x_{\alpha_i} \in Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i}$ y así, $y_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) \in f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i})$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. De lo anterior obtenemos que $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i}))$. Lo que implica que $\widehat{f}(U) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i}))$. Por otro lado, sea $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i}))$, Entonces, para cada $i = 1, 2, ..., n$, se tiene que $\rho_{\alpha_i}((y_\alpha)_{\alpha\in I}) = y_{\alpha_i} \in f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i})$. Por lo que para cada $i = 1, 2, ..., n$, existe $x_{\alpha_i} \in Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i}$ tal que $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = y_{\alpha_i}$. Ahora, para cada $\alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ sea $x_\alpha \in Z_\alpha$ tal que $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$. De esta manera, $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in Z \cap V$ y $\widehat{f}((x_\alpha)_{\alpha\in I}) = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$. Por tanto, $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \widehat{f}(Z \cap V) = \widehat{f}(U)$. Con lo que se obtiene, $\bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i})) \subseteq \widehat{f}(U)$. De lo anterior se concluye que $\widehat{f}(U) = \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(f_{\alpha_i}(Z_{\alpha_i} \cap V_{\alpha_i})) \in \tau_Q$. Lo que demuestra que $\widehat{f}$ inductivamente abierta.

□

3.4. Operaciones invariantes de funciones casi abiertas

Teorema 3.9. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones.*

a) *Si f y g son funciones casi abiertas, entonces $g \circ f$ es casi abierta.*

b) *Si $g \circ f$ es casi abierta, entonces g es casi abierta.*

c) *$f : X \to Y$ es casi abierta si y solo si $f|_{f^{-1}[D]} : f^{-1}[D] \to D$ es casi abierta para todo $D \subseteq Y$.*

d) *$\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es casi abierta si y solo si f_α es casi abierta para todo $\alpha \in I$.*

e) *$\widehat{f} : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ es casi abierta si y solo si f_α es casi abierta para todo $\alpha \in I$.*

Demostración. *a*) Sea $z \in Z$. Sabemos por el Teorema 2.19 que existe $y \in g^{-1}[z]$ tal que si $D \subseteq Z$ y $z \in \mathrm{Fr}_Z D$, entonces $y \in \mathrm{Fr}_Y g^{-1}[D]$. Y para y, existe $x \in f^{-1}[y] \subseteq f^{-1}[g^{-1}[z]] = (g \circ f)^{-1}[z]$ de modo que si $B \subseteq Y$ y $y \in \mathrm{Fr}_Y B$, entonces $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[B]$. Veremos que x satisface la condición deseada. Sea $D \subseteq Z$ tal que $z \in \mathrm{Fr}_Z D$. Entonces $y \in \mathrm{Fr}_Y g^{-1}[D]$. Lo que implica que $x \in \mathrm{Fr}_X f^{-1}[g^{-1}[D]] = \mathrm{Fr}_X (g \circ f)^{-1}[D]$. Esto demuestra que la composición de funciones casi abiertas es casi abierta.

b) Sea $z \in Z$. Del Teorema 2.19 obtenemos que existe $x \in (g \circ f)^{-1}[z]$ tal que si $D \subseteq Z$ y $z \in \mathrm{Cl}_Z D$, entonces $x \in \mathrm{Cl}_X (g \circ f)^{-1}[D]$. Sean $y = f(x) \in g^{-1}[z]$ y $D \subseteq Z$ tales que $z \in \mathrm{Cl}_Z D$. Entonces $x \in \mathrm{Cl}_X (g \circ f)^{-1}[D] = \mathrm{Cl}_X f^{-1}[g^{-1}[D]] \subseteq f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y g^{-1}[D]]$. Por tanto, $y \in \mathrm{Cl}_Y g^{-1}[D]$. Esto prueba que g es casi abierta.

c) $\Rightarrow$) Sean $D \subseteq Y$ y $y \in D$. Sabemos que existe $x \in f^{-1}[y]$ tal que si $x \in U \in \tau_X$, entonces $y \in \mathrm{Int}_Y f(U)$. Sea $V \in \tau_{f^{-1}[D]}$ tal que $x \in V$. Entonces existe $U \in \tau_X$ tal que $V = U \cap f^{-1}[D]$. Lo anterior y la Proposición 1.5 implican que $y \in (\mathrm{Int}_Y f(U)) \cap D \subseteq f(U) \cap D = f(U \cap f^{-1}[D]) = f(V)$. Por tanto, $y \in \mathrm{Int}_D f(V)$. Concluimos que $f|_{f^{-1}[D]}$ es casi abierta.

$\Leftarrow$) Supongamos que $f|_{f^{-1}[D]}$ es casi abierta para todo $D \subseteq Y$. Entonces para $D = Y$ se tiene que $f|_{f^{-1}[Y]} = f|_X = f$ es casi abierta.

d) $\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{f}$ es casi abierta. Sean $\gamma \in I$ y $y_\gamma \in Y_\gamma$. Dado que $y_\gamma \in \bigoplus Y_\alpha$, del Teorema 2.19 se sigue que existe $x \in \overline{f}^{-1}[y_\gamma]$ tal que si $B \subseteq \bigoplus Y_\alpha$ y $x \in \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\alpha}\overline{f}^{-1}[B]$, entonces $y_\gamma \in \mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha}B$. Se tiene del Lema 3.3 que $x \in f_\gamma^{-1}[y_\gamma]$. Sea $A \subseteq Y_\gamma$ tal que $x \in \mathrm{Int}_{X_\gamma}f_\gamma^{-1}[A]$. Del Lema 3.4 se sigue que $x \in \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\alpha}(f_\gamma^{-1}[A]) = \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\alpha}(\overline{f}^{-1}[A])$. Por tanto, $y_\gamma \in \mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha}A = \mathrm{Int}_{Y_\gamma}A$. Esto prueba que f_γ es casi abierta para todo $\gamma \in I$.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_α es casi abierta para todo $\alpha \in I$. Sea $y \in \bigoplus Y_\alpha$. Entonces $y \in Y_\gamma$ para algún $\gamma \in I$. De esto, sabemos que existe $x \in f_\gamma^{-1}[y] = \overline{f}^{-1}[y]$ tal que si $A \subseteq Y_\gamma$ y $x \in \mathrm{Int}_{X_\gamma}f_\gamma^{-1}[A]$, entonces $y \in \mathrm{Int}_{Y_\gamma}A$. Sea $B \subseteq \bigoplus Y_\alpha$ tal que $x \in \mathrm{Int}_{\bigoplus X_\alpha}\overline{f}^{-1}[B]$. Nótese que $x \in X_\gamma$. De lo anterior y del Lema 3.3 se sigue que:

$$
\begin{aligned}
x \in (\mathrm{Int}_{\bigoplus X_\alpha}\overline{f}^{-1}[B]) \cap X_\gamma &= \mathrm{Int}_{X_\gamma}((\mathrm{Int}_{\bigoplus X_\alpha}\overline{f}^{-1}[B]) \cap X_\gamma) \\
&\subseteq \mathrm{Int}_{X_\gamma}(\overline{f}^{-1}[B] \cap X_\gamma) \\
&= \mathrm{Int}_{X_\gamma}(\overline{f}^{-1}[B] \cap f_\gamma^{-1}[Y_\gamma]) \\
&= \mathrm{Int}_{X_\gamma}(\overline{f}^{-1}[B] \cap \overline{f}^{-1}[Y_\gamma]) \\
&= \mathrm{Int}_{X_\gamma}\overline{f}^{-1}(B \cap Y_\gamma) \\
&= \mathrm{Int}_{X_\gamma}f_\gamma^{-1}(B \cap Y_\gamma).
\end{aligned}
$$

Por tanto $y \in \mathrm{Int}_{Y_\gamma}(B \cap Y_\gamma) \subseteq B$. Dado que $\mathrm{Int}_{Y_\gamma}(B \cap Y_\gamma) \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha}B$. Con lo que se concluye que $\overline{f}$ es casi abierta.

e) $\Rightarrow$) Supongamos que $\widehat{f}$ es casi abierta. Dado que $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ es abierta, del Teorema 2.1 se tiene que ρ_α es casi abierta. Luego, de *a*) se sigue que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es casi abierta para todo $\alpha \in I$. Sabemos que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$. De *b*) concluimos que f_α es casi abierta para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_α es casi abierta para todo $\alpha \in I$. Sea $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in Q$. Sabemos que para cada $\alpha \in I$, existe $x_\alpha \in f_\alpha^{-1}[y_\alpha]$ tal que $y_\alpha \in \mathrm{Int}_{Y_\alpha}f_\alpha(U_\alpha)$ para todo $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ tal que $x_\alpha \in U_\alpha$. Sea $U \in \tau_P$ tal que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in U$. De esto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i = 1, 2, ..., n$ existe $U_{\alpha_i} \in \tau_{X_{\alpha_i}}$, tales que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subseteq U$. Esto implica que $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Así, $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = y_{\alpha_i} \in \mathrm{Int}_{Y_{\alpha_i}}f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Por tanto, $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Int}_{Y_{\alpha_i}}f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})) \in \tau_Q$. Veamos que

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Int}_{Y_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})) \subseteq \widehat{f}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}))$. Sea $(z_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Int}_{Y_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}))$. Así, para cada $i = 1, 2, ..., n$, se tiene que $\rho_{\alpha_i}((z_\alpha)_{\alpha\in I}) = z_{\alpha_i} \in \mathrm{Int}_{Y_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$, por lo que existe $w_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ tal que $f_{\alpha_i}(w_{\alpha_i}) = z_{\alpha_i}$. Ahora, para cada $\alpha \in I \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ sea $w_\alpha \in f_\alpha^{-1}((z_\alpha))$. De esta manera, $(w_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ y $\widehat{f}((w_\alpha)_{\alpha\in I}) = (z_\alpha)_{\alpha\in I}$. Por tanto, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \rho_{\alpha_i}^{-1}(\mathrm{Int}_{Y_{\alpha_i}} f_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})) \subseteq \widehat{f}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) \subseteq \widehat{f}(U)$. Esto muestra que $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathrm{Int}_Q \widehat{f}(U)$. Lo que prueba que $\widehat{f}$ es una función casi abierta.

$\square$

3.5. Operaciones invariantes de funciones pseudo abiertas

Teorema 3.10. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) Si f y g son funciones pseudo abiertas, entonces $g \circ f$ es pseudo abierta.

b) Si $g \circ f$ es pseudo abierta, entonces g es pseudo abierta.

c) $f : X \to Y$ es pseudo abierta si y solo si $f|_{f^{-1}[D]} : f^{-1}[D] \to D$ es pseudo abierta para todo $D \subseteq Y$.

d) $\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es pseudo abierta si y solo si f_α es pseudo abierta para todo $\alpha \in I$.

e) Si $\widehat{f} : \prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in I} Y_\alpha$ es pseudo abierta, entonces f_α es pseudo abierta para todo $\alpha \in I$.

Demostración. a) Supongamos que f y g son funciones pseudo abiertas, Sea $D \subseteq Z$. Del Teorema 2.20 se sigue que

$$\mathrm{Cl}_Z D = g(\mathrm{Cl}_Y g^{-1}[D]) = g(f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[g^{-1}[D]])).$$

Por tanto, $\mathrm{Cl}_Z D = g\circ f(\mathrm{Cl}_X (g\circ f)^{-1}[D])$. Esto demuestra que la composición de funciones pseudo abierta es pseudo abierta.

b) Supongamos que $g\circ f$ es pseudo abierta. Sea $z \in Z$ y $V \in \tau_Y$ tal que $g^{-1}[z] \subseteq V$. De la continuidad de f se sigue que $f^{-1}[g^{-1}[z]] = (g\circ f)^{-1}[z] \subseteq f^{-1}[V] \in \tau_X$. Por tanto, $z \in \mathrm{Int}_Z g\circ f(f^{-1}[V]) = \mathrm{Int}_Z g(V)$. Lo que prueba que g es pseudo abierta.

c) $\Rightarrow$) Sean $D \subseteq Y$, $y \in D$ y $U \in \tau_{f^{-1}[D]}$ tal que $(f|_{f^{-1}[D]})^{-1}[y] \subseteq U$. Sabemos que existe $V \in \tau_X$ tal que $U = V \cap f^{-1}[D]$. Nótese que $f^{-1}[y] = (f|_{f^{-1}[D]})^{-1}[y] \subseteq V$. De suponer que f es pseudo abierta, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y f(V)$. Esto y la Proposición 1.5 implican que $y \in (\mathrm{Int}_Y f(V)) \cap D \subseteq f(V) \cap D = f(V \cap f^{-1}[D]) = f(U) = f|_{f^{-1}[D]}(U)$, es decir, $y \in \mathrm{Int}_D f|_{f^{-1}[D]}(U)$. Así, $f|_{f^{-1}[D]}$ es pseudo abierta.

$\Leftarrow$) Supongamos que $f|_{f^{-1}[D]}$ es pseudo abierta para todo $D \subseteq Y$. En particular para $D = Y$ se tiene que $f|_{f^{-1}[Y]} = f|_X = f$ es una función pseudo abierta.

d) $\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{f}$ es pseudo abierta. Sean $\gamma \in I$, $y \in Y_\gamma$ y $U_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$ tales que $f_\gamma^{-1}[y] \subseteq U_\gamma$. Del Lema 3.3 se sigue que $\overline{f}^{-1}[y] \subseteq U_\gamma$, el cual es un subconjunto abierto de $\bigoplus X_\alpha$. Por tanto, $y \in \mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha} \overline{f}(U_\gamma)$. Dado que $\overline{f}(U_\gamma) = f_\gamma(U_\gamma) \subseteq Y_\gamma$, del Lema 3.4 se obtiene que $y \in \mathrm{Int}_{Y_\gamma} f_\gamma(U_\gamma) \in \tau_{Y_\gamma}$. Lo que demuestra que f_γ es pseudo abierta.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_α es pseudo abierta para todo $\alpha \in I$. Sean $y \in \bigoplus Y_\alpha$ y $U \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$ tales que $\overline{f}^{-1}[y] \subseteq U$. Dado que $\bigoplus Y = \bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha$, se tiene que $y \in Y_\gamma$ para algún $\gamma \in I$. De lo anterior y del Lema 3.3 se sigue que $f_\gamma^{-1}[y] \subseteq U \cap X_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$. Lo que implica que $y \in \mathrm{Int}_{Y_\gamma} f_\gamma(U \cap X_\gamma) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(U \cap X_\alpha) = \overline{f}(U)$. Esto prueba que $y \in \mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha} \overline{f}(U)$. Concluimos que $\overline{f}$ es pseudo abierta.

e) Supongamos que $\widehat{f}$ es pseudo abierta. Dado que $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ es abierta, del Teorema 2.1 se tiene que ρ_α es pseudo abierta para todo $\alpha \in I$. Luego, de *a*) se sigue que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es pseudo abierta. Sabemos que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$. De $b)$ concluimos que f_α es pseudo abierta para todo $\alpha \in I$.

$\square$

3.6. Operaciones invariantes de funciones cociente

Teorema 3.11. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y supra-yectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) Si f y g son funciones cociente, entonces $g \circ f$ es cociente.

b) Si $g \circ f$ es cociente, entonces g es cociente.

c) $\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es cociente si y solo si f_α es cociente para todo $\alpha \in I$.

d) Si $\widehat{f} : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ es cociente, entonces f_α es cociente para todo $\alpha \in I$.

Demostración. $a)$ Sea $V \subseteq Z$ tal que $(g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]] \in \tau_X$. De suponer que f cociente, se tiene que $g^{-1}[V] \in \tau_Y$. Dado que g es una función cociente, tenemos que $V \in \tau_Z$. Lo que demuestra que la composición de tales funciones es una función cociente.

$b)$ Supongamos que $g \circ f$ es cociente. Sea $V \subseteq Z$ tal que $g^{-1}[V] \in \tau_Y$. Notemos que $f^{-1}[g^{-1}[V]] = (g \circ f)^{-1}[V] \in \tau_X$. Por tanto, $V \in \tau_Z$, es decir, g es una función cociente.

$c)$ $\Rightarrow)$ Sean $\gamma \in I$ y $V \subseteq Y_\gamma$ tales que $f_\gamma^{-1}[V] \in \tau_{X_\gamma}$. Dado que $V \subseteq Y_\gamma \subseteq \bigoplus Y_\alpha$ y $\overline{f}^{-1}[V] = f_\gamma^{-1}[V] \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$, de suponer que $\overline{f}$ es cociente se tiene $V \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. Del Lema 3.4 se sigue que $V \in \tau_{Y_\gamma}$. Por tanto, f_γ es una función cociente.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_α es cociente para todo $\alpha \in I$. Sea $W \subseteq \bigoplus Y_\alpha$ tal que $\overline{f}^{-1}[W] \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}$. Observe que:

$$\begin{aligned}
\overline{f}^{-1}[W] &= \overline{f}^{-1}[W \cap (\bigoplus Y_\alpha)] \\
&= \overline{f}^{-1}\big[W \cap \big(\bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha\big)\big] \\
&= \overline{f}^{-1}\big[\bigcup_{\alpha\in I} (W \cap Y_\alpha)\big] \\
&= \bigcup_{\alpha\in I} \overline{f}^{-1}(W \cap Y_\alpha) \\
&= \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(W \cap Y_\alpha).
\end{aligned}$$

Notemos que para cada $\gamma \in I$ se tiene que, $\big(\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(W \cap Y_\alpha)\big) \cap X_\gamma = f_\gamma^{-1}(W \cap Y_\gamma) \in \tau_{X_\gamma}$. Esto implica que $W \cap Y_\alpha \in \tau_{Y_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Lo que garantiza que $W \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. Concluimos que $\overline{f}$ es cociente.

d) Supongamos que $\widehat{f}$ es cociente. Dado que $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ es abierta, del Teorema 2.1 se tiene que ρ_α es cociente para todo $\alpha \in I$. Luego, de *a*) se sigue que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es cociente. Sabemos que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$. De *b*) concluimos que f_α es cociente para todo $\alpha \in I$.

$\square$

3.7. Operaciones invariantes de funciones semi abiertas

Teorema 3.12. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) Si f y g son funciones semi abiertas, entonces $g \circ f$ es semi abierta.

b) Si $g \circ f$ es semi abierta, entonces g es semi abierta.

c) $\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es semi abierta si y solo si f_α es semi abierta para todo $\alpha \in I$.

d) Si $\widehat{f} : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ *es semi abierta, entonces* f_α *es semi abierta para todo* $\alpha \in I$

Demostración. a) Supongamos que f y g son funciones semi abiertas. Sea D un subconjunto denso de Z. Del Teorema 2.24 se sigue que $g^{-1}[D]$ es denso en Y. Como f es semi abierta, $f^{-1}[g^{-1}[D]] = (g \circ f)^{-1}[D]$ es un subconjunto denso de X. Esto demuestra que la composición de funciones semi abiertas pertenece a dicha clase.

b) Supongamos que $g \circ f$ es semi abierta. Sea $V \in \tau_Y^*$. Entonces $f^{-1}[V] \in \tau_X^*$ y así, $\emptyset \neq \mathrm{Int}_Z(g \circ f(f^{-1}[V])) = \mathrm{Int}_Z g(V)$. Es decir, g es semi abierta.

c) $\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{f}$ es semi abierta. Sea $\gamma \in I$ y $U_\gamma \in \tau_{X_\gamma}^*$. Dado que $U_\gamma \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}^*$, se tiene que $\mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha}\overline{f}(U) = \mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha} f_\gamma(U_\gamma) \neq \emptyset$. Del Lema 3.4 se sigue que $\mathrm{Int}_{Y_\gamma} f_\gamma(U) \neq \emptyset$. Lo que demuestra que f_γ es semi abierta.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que f_α es semi abierta para todo $\alpha \in I$. Sea $U \in \tau_{\bigoplus X_\alpha}^*$. Entonces $U \cap X_\gamma \in \tau_{X_\gamma}^*$ para algún $\gamma \in I$. Por tanto $\mathrm{Int}_{Y_\gamma} f_\gamma(U \cap X_\gamma) \in \tau_{Y_\gamma}^*$. Dado que $\mathrm{Int}_{Y_\gamma} f_\gamma(U \cap X_\gamma) \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$ e $\mathrm{Int}_{Y_\gamma} f_\gamma(U \cap X_\gamma) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(U \cap X_\alpha) = \overline{f}(U)$, concluimos que $\mathrm{Int}_{\bigoplus Y_\alpha}\overline{f}(U) \neq \emptyset$. Esto prueba que $\overline{f}$ es una función semi abierta.

d) Supongamos que $\widehat{f}$ es semi abierta. Dado que $\rho_\alpha : Q \to Y_\alpha$ es abierta, del Teorema 2.1 se tiene que ρ_α es semi abierta para todo $\alpha \in I$. Luego, de a) se sigue que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es semi abierta. Sabemos que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$, donde $\pi_\alpha : P \to X_\alpha$. De b) concluimos que f_α es semi abierta para todo $\alpha \in I$.

□

3.8. Operaciones invariantes de funciones denso abiertas

Teorema 3.13. *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *funciones continuas y suprayectivas entre espacios topológicos. Se verifican las siguientes proposiciones.*

a) Si f *y* g *son funciones denso abiertas, entonces* $g \circ f$ *es denso abierta.*

b) Si $g \circ f$ es denso abierta, entonces g es denso abierta.

c) $f : X \to Y$ es denso abierta si y solo si $f|_D : D \to f(D)$ es denso abierta para todo $D \in \tau_X$.

d) $\overline{f} : \bigoplus X_\alpha \to \bigoplus Y_\alpha$ es denso abierta si y solo si f_α es denso abierta para todo $\alpha \in I$.

e) Si $\widehat{f} : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ es denso abierta, entonces f_α es denso abierta para todo $\alpha \in I$.

Demostración. *a*) Sea $W \in \tau_Z$. Del Teorema 2.26 sabemos que $\mathrm{Cl}_Y g^{-1}[W] = g^{-1}[\mathrm{Cl}_Z W]$. Nótese que $g^{-1}[W] \in \tau_Y$. Dado que f es denso abierta, se obtiene que $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[g^{-1}[W]] = f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y g^{-1}[W]]$. De las igualdades anteriores se obtiene que $(g \circ f)^{-1}[\mathrm{Cl}_Z W] = \mathrm{Cl}_X (g \circ f)^{-1}[W]$. Esto demuestra que la composición de funciones denso abiertas es denso abierta.

b) Supongamos que $g \circ f$ es denso abierta. Sea $U \in \tau_Y$. Entonces $f^{-1}[U] \in \tau_X$. Del teorema 2.26 se sigue que $g \circ f(f^{-1}[U]) \subseteq \mathrm{Int}_Z \mathrm{Cl}_Z (g \circ f(f^{-1}[U]))$, es decir, $g(U) \subseteq \mathrm{Int}_Z \mathrm{Cl}_Z g(U)$. Concluimos que g es denso abierta.

c) $\Rightarrow$) Sea D un subconjunto abierto de X y $W \in \tau_D$. Por tanto, existe $U \in \tau_X$ tal que $W = U \cap D$. Dado que $D \in \tau_X$, se tiene que $W \in \tau_X$, por lo que existe $V \in \tau_Y$ tal que $\mathrm{Cl}_V f(W) = V$. Sea $O = V \cap f(D) \in \tau_{f(D)}$. Así,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_O f|_D(W) &= \mathrm{Cl}_O f(W) \\
&= O \cap \mathrm{Cl}_Y f(W) \\
&= (V \cap f(D)) \cap \mathrm{Cl}_Y f(W) \\
&= f(D) \cap (V \cap \mathrm{Cl}_Y f(W)) \\
&= f(D) \cap \mathrm{Cl}_V f(W) \\
&= f(D) \cap V \\
&= O.
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que $f|_D$ es denso abierta.

$\Leftarrow$) Dado que $X \in \tau_X$, de la hipótesis, se sigue que $f|_X = f$ es denso abierta.

d) $\Rightarrow$) Sean $\gamma \in I$ y $U_\gamma \in \tau_{X_\gamma}$. Por ser $\overline{f}$ denso abierta, se tiene que $\overline{f}(U_\gamma) \subseteq \operatorname{Int}_{\bigoplus Y_\alpha}\operatorname{Cl}_{\bigoplus Y_\alpha}\overline{f}(U_\gamma)$. Dado que $\overline{f}(U_\gamma) = f_\gamma(U_\gamma) \subseteq Y_\gamma$, el Lema 3.4 garantiza que $f_\gamma(U_\gamma) \subseteq \operatorname{Int}_{Y_\gamma}\operatorname{Cl}_{Y_\gamma} f_\gamma(U_\gamma)$. Esto prueba que f_γ es denso abierta.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_α es denso abierta para todo $\alpha \in I$. Sea $W \in \tau_{\bigoplus Y_\alpha}$. De la hipótesis y del Teorema 2.26 se tiene que $\operatorname{Cl}_{X_\alpha} f_\alpha^{-1}[W \cap Y_\alpha] = f_\alpha^{-1}[\operatorname{Cl}_{Y_\alpha}(W \cap Y_\alpha)]$ para cada $\alpha \in I$. Del Lema 3.5 se obtiene que $\bigcup_{\alpha\in I} \operatorname{Cl}_{X_\alpha} f_\alpha^{-1}[W \cap Y_\alpha] = \operatorname{Cl}_{\bigoplus X_\alpha}\big(\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}[W \cap Y_\alpha]\big)$. Esta igualdad y el Lema 3.3 implican que $\bigcup_{\alpha\in I} \operatorname{Cl}_{X_\alpha} f_\alpha^{-1}[W \cap Y_\alpha] = \operatorname{Cl}_{\bigoplus X_\alpha}\big(\bigcup_{\alpha\in I} \overline{f}^{-1}[W \cap Y_\alpha]\big) = \operatorname{Cl}_{\bigoplus X_\alpha}\big(\overline{f}^{-1}\big[\bigcup_{\alpha\in I}(W \cap Y_\alpha)\big]\big) = \operatorname{Cl}_{\bigoplus X_\alpha}(\overline{f}^{-1}[W])$. De manera similar obtenemos que $\bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}[\operatorname{Cl}_{Y_\alpha}(W \cap Y_\alpha)] = \overline{f}^{-1}[\operatorname{Cl}_{\bigoplus Y_\alpha} W]$. Con lo que concluimos que $\operatorname{Cl}_{\bigoplus X_\alpha}(\overline{f}^{-1}[W]) = \overline{f}^{-1}[\operatorname{Cl}_{\bigoplus Y_\alpha} W]$, lo que demuestra que $\overline{f}$ es denso abierta.

e) Supongamos que $\widehat{f}$ es denso abierta. Dado que ρ_α es abierta, del Teorema 2.1 se tiene que ρ_α es denso abierta para todo $\alpha \in I$. Luego, de *a*) se sigue que $\rho_\alpha \circ \widehat{f}$ es denso abierta. Sabemos que $\rho_\alpha \circ \widehat{f} = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. De *b*) concluimos que f_α es denso abierta para todo $\alpha \in I$.

A continuanción presentamos un ejemplo que muestra que el inverso de la proposición *a*) no es válido para ninguna de las clases de funciones abiertas, inductivamente abiertas, casi abiertas, pseudo abiertas y cociente.

Ejemplo 3.14. *Consideremos a* $X = \{(1/n, m) : n, m \in \mathbb{N}\} \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$, $Y = \{(1/n, m) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{(0, m) : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *y* $Z = \{(0, m) : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *como subespacios de* $\mathbb{R}^2$. *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *definidas por:*

$$f((x,y)) = \begin{cases} (x,y), & si\ x \neq 1 \\ (0,0), & si\ x = y = 1 \\ (1/y, 0), & si\ x = 1, y \neq 1 \end{cases}$$

$$g(x,y) = (0,y).$$

Observe que:

- $f^{-1}[(0,0)] = \{(1,1)\} \in \tau_X$.
- $f^{-1}[(1/n,0)] = \{(1,n)\} \in \tau_X$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
- $f^{-1}[(1/n,m)] = \{(1/n,m)\} \in \tau_X$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $m \in \mathbb{N}$.
- $f^{-1}[\{(1/n,m) : n \geq k_m, k_m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup \{(0,m)\}] = \{(1/n,m) : n \geq k_m, k_m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup \{(0,m)\} \in \tau_X$ para cada $m \in \mathbb{N}$.
- $g^{-1}[(0,m)] = \{(1/n,m) : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup \{(0,m)\} \in \tau_Y$ para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Esto muestra que f y g son continuas y suprayectivas. Por otro lado, dado que Z es un espacio discreto, se tiene que $g \circ f$ es una función abierta. Ahora observe que $\{(0,0)\} \subseteq Y$ es tal que $f^{-1}[\{(0,0)\}] = \{(1,1)\} \in \tau_X$, pero $\{(0,0)\} \notin \tau_Y$. Es decir, f no es una función cociente.

$\square$

Capítulo 4

Funciones inducidas de formas débiles de funciones abiertas a productos simétricos

Los hiperespacios han sido de gran trascendencia para describir propiedades de un espacio topológico. Un área dentro del estudio de los hiperespacios ampliamente estudiada es la de funciones inducidas, ésta inicia con los trabajos de H. Hosokawa en [7] y tiene aún mucho terreno por explorar, por ejemplo, estudiar funciones inducidas de formas débiles de funciones abiertas a productos simétricos de espacios Hausdorff. La teoría de funciones inducidas está desarrollada en gran parte para funciones entre continuos, es decir, en espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos. Nuestra investigación se enfoca al estudio de las implicaciones entre las siguientes dos condiciones:
1. $f \in \mathfrak{M}$,
2. $f_n \in \mathfrak{M}$,
cuando $\mathfrak{M}$ es alguna de las siguientes clases de funciones: abiertas, inductivamente abiertas, casi abiertas, pseudo abiertas, cociente, semi abiertas y denso abiertas.
Este problema se ha abordado en varias ocasiones para clases de funciones entre continuos ([1], [2], [3], [6], [8]).

4.1. El n-ésimo producto simétrico y algunas de sus propiedades

Sea X un espacio topológico. Definimos ***el n-ésimo producto simétrico*** de X como:

$$F_n(X) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}.$$

Para $\mathcal{V} \subseteq P(X)$, definimos:

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \{A \in F_n(X) : A \subseteq \bigcup \mathcal{V} \text{ y } A \cap V \neq \emptyset \text{ para todo } V \in \mathcal{V}\}.$$

Diremos que $\mathcal{U} \subseteq \tau_X$, es una ***familia celular de orden n*** si $1 \leq |\mathcal{U}| \leq n$ y $U \cap V = \emptyset$ para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $U \neq V$. Definimos $\mathfrak{C}_n(X) = \{\mathcal{U} \subseteq \tau_X : \mathcal{U}$ es familia celular de orden $n\}$.

Teorema 4.1. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. El conjunto $\{\langle \mathcal{U} \rangle : \mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)\}$ es base para alguna topología sobre $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $\beta = \{\langle \mathcal{U} \rangle : \mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)\}$. Probaremos que:
i) $\bigcup \beta = F_n(X)$
ii) Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(X)$ y $A \in F_n(X)$ son tales que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$, entonces existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $A \in \langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$.

i) Notemos que $\mathcal{U} = \{X\} \in \mathfrak{C}_n(X)$ y $\langle \mathcal{U} \rangle = \{B \in F_n(X) : B \subseteq \bigcup\{X\}$ y $B \cap X \neq \emptyset\} = \{B \in F_n(X) : B \subseteq X\} = F_n(X)$. Concluimos que $\bigcup \beta = F_n(X)$.

ii) Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(X)$, $A \in F_n(X)$ tales que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$. Notemos que $|A| \geq |\mathcal{U}|$ y $|A| \geq |\mathcal{V}|$. Definimos $G : A \longrightarrow \mathcal{U}$ y $H : A \longrightarrow \mathcal{V}$ funciones suprayectivas tales que $a \in G(a) \cap H(a)$. Ahora consideremos $I : A \to \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ definida por $I(a) = G(a) \cap H(a) \in \tau_X$. Obsérvese que $\mathcal{W} = \{I(a) : a \in A\} \subseteq \tau_X$. Por otro lado, sean $a, b \in A$ tales que $I(a) \neq I(b)$. Notemos que $G(a) \neq G(b)$ ó $H(a) \neq H(b)$, en caso contrario tendríamos $I(a) = G(a) \cap H(a) = G(b) \cap H(b) = I(b)$. Supongamos que $G(a) \neq G(b)$. Esto nos lleva a que $G(a) \cap G(b) = \emptyset$. Dado que $I(a) \cap I(b) = (G(a) \cap H(a)) \cap (G(b) \cap H(b)) \subseteq G(a) \cap G(b)$, se tiene que $I(a) \cap I(b) = \emptyset$. Lo que implica que $|\mathcal{W}| = |A| \leq n$. De lo anterior obtenemos que $\langle \mathcal{W} \rangle \in \beta$. En seguida probaremos que $A \in \langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$. Si $a \in A$, entonces

$a \in G(a) \cap H(a) = I(a) \in \mathcal{W}$. Por tanto, $A \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y además $I(a) \cap A \neq \emptyset$ para cada $a \in A$. Es decir, $A \in \langle \mathcal{W} \rangle$. Ahora, sea $B \in \langle \mathcal{W} \rangle$ y $b \in B$. Sabemos que existe $a \in A$ tal que $b \in I(a) = G(a) \cap H(a)$. Por tanto, $b \in \bigcup \mathcal{U}$ y $b \in \bigcup \mathcal{V}$. Por otro lado, sea $U \in \mathcal{U}$. Por ser G suprayectiva, existe $a \in A$ tal que $G(a) = U$. Dado que $B \in \langle \mathcal{W} \rangle$, se tiene que $B \cap I(a) = B \cap (G(a) \cap H(a)) \neq \emptyset$. Así, $B \cap G(a) = B \cap U \neq \emptyset$. Similarmente se obtiene que $B \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Por tanto, $B \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$. Del Teorema 1.7 concluimos que β es base para alguna topología sobre $F_n(X)$. □

Dotaremos al n-ésimo producto simétrico de X con la topología generada por el conjunto $\beta = \{\langle \mathcal{U} \rangle : \mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)\}$, la cual denotaremos por $\tau_{F_n(X)}$. A esta topología se le concoce como ***Topología de Vietoris*** sobre $F_n(X)$.

Proposición 4.2. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in [P(X)]^{<n+1}$. Se verifican las siguientes proposiciones:*
a) Si $\langle \mathcal{A} \rangle \neq \emptyset$ y $\langle \mathcal{A} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ y para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $A_B \subseteq B$.
b) Si $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ y para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $A_B \subseteq B$, entonces $\langle \mathcal{A} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$.

Demostración. a) Sea $D \in \langle \mathcal{A} \rangle$ y $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Notemos que $x \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Dado que $D \in \langle \mathcal{A} \rangle$, se tiene que $D \cap A \neq \emptyset$. Por lo que existe $d \in D$ tal que $d \in A$. Consideremos $E = (D \setminus \{d\}) \cup \{x\}$. De esta manera, $E \in \langle \mathcal{A} \rangle$ y por tanto, $E \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Así, $x \in E \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Es decir, $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Ahora, sea $B \in \mathcal{B}$. Supongamos que para cada $A \in \mathcal{A}$, existe $a_A \in A$ tal que $a_A \notin B$. Sea $G = \{a_A : A \in \mathcal{A}\}$. Así $G \in \langle \mathcal{A} \rangle$ y $|G| \leq |A| \leq n$. De la hipótesis se sigue que $G \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Por tanto, $G \cap B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Concluimos que para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $A_B \subseteq B$.

b) Sea $D \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Puesto que $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$, se tiene que $D \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Ahora, sea $B \in \mathcal{B}$. Sabemos de la hipótesis que existe $A_B \in \mathcal{A}$ tal que $A_B \subseteq B$. Dado que $D \in \langle \mathcal{A} \rangle$, tenemos que $D \cap A_B \neq \emptyset$. Esto implica que $D \cap B \neq \emptyset$. Por tanto, $D \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

□

El siguiente resultado es una consecuencia del inciso a) de la Proposicion 4.2.

Corolario 4.3. *Sean (X,τ_X) un espacio topológico y $\mathcal{W} \subseteq P(X)$ tal que $\langle \mathcal{W} \rangle \neq \emptyset$. Si $U \subseteq X$ es tal que $\langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \langle \{U\} \rangle$, entonces $W \subseteq U$ para todo $W \in \mathcal{W}$.*

Proposición 4.4. *Sean (X,τ_X) un espacio topológico de Hausdorff, $\mathsf{O} \in \tau_{F_n(X)}$ y $A \in \mathsf{O}$. Entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)$, tal que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle \subseteq \mathsf{O}$ y $|\mathcal{U}| = |A|$.*

Demostración. Sabemos que existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $A \in \langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \mathsf{O}$. Nótese que para cada $a \in A$, existe un único $W_a \in \mathcal{W}$ tal que $a \in W_a$. Sea $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Dado que X es un espacio Hausdorff, para cada $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$, tales que $i < j$, existen $U_{ij}, V_{ij} \in \tau_X$ de modo que $a_i \in U_{ij}$, $a_j \in V_{ij}$ y $U_{ij} \cap V_{ij} = \emptyset$. Consideremos $U_1 = \bigcap_{j=2}^{m} (U_{1j}) \cap W_{a_1}$, $U_m = \bigcap_{i=1}^{m-1} (V_{im}) \cap W_{a_m}$ y para $i \neq 1, m$, sea $U_i = \bigcap_{j=i+1}^{m} (U_{ij}) \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} (V_{ki}) \cap W_{a_i}$. Notemos que $a_i \in U_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, 2, ..., m\}$. Obsérvese que $Ui \in \tau_X$ para toda $i = 1, 2, ..., m$. Por otro lado, sean $l, q \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ tales que $l \neq q$. Supongamos $l < q$. Notemos que $U_l \cap U_q \subseteq \bigcap_{j=l+1}^{m} (U_{lj}) \cap \bigcap_{k=1}^{q-1} (V_{kq}) \subseteq U_{lq} \cap V_{lq} = \emptyset$. Esto implica que $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)$ y $|\mathcal{U}| = |A|$. Ahora, dado que $a_i \in U_i$, se tiene que $U_i \cap A \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Lo que garantiza que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Finalmente, observemos que $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y para cada $W \in \mathcal{W}$, existe $k \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que $a_k \in W = W_{a_k}$. Por tanto, $U_{a_k} \subseteq W_{a_k} = W$. De esto y de la Proposición 4.2 se obtiene que $\langle \mathcal{U} \rangle \subseteq \langle \mathcal{W} \rangle$, lo que concluye la demostración.

$\square$

Proposición 4.5. *Sean (X,τ_X) un espacio topológico. Entonces, X es de Hausdorff si y solo si $F_n(X)$ es de Hausdorff.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $A, B \in F_n(X)$ tales que $A \neq B$. Notemos que $|A \cup B| \leq 2n$. Dado que X es de Hausdorff, de la Proposición 4.4 se tiene que existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_{2n}(X)$ tal que $(A \cup B) \in \langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \langle \{X\} \rangle$ y $|\mathcal{W}| = |A \cup B|$. Sean $\mathcal{U} = \{W \in \mathcal{W} : W \cap A \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{V} = \{W \in \mathcal{W} : W \cap B \neq \emptyset\}$. De esta manera, $A \in \langle \mathcal{U} \rangle \in \beta$ y $B \in \langle \mathcal{V} \rangle \in \beta$. Veamos que $\langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle = \emptyset$. Dado que $A \neq B$, podemos suponer que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$. Notemos que $a \in W$ para algún $W \in \mathcal{W}$. Dado que $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_{2n}(X)$ y $|\mathcal{W}| = |A \cup B|$, se tiene que $|W \cap (A \cup B)| = 1$. Por tanto $W \in \mathcal{U}$ y $W \notin \mathcal{V}$. Ahora supongamos que existe $D \in F_n(X)$ tal que $D \in \langle \mathcal{U} \rangle$ y $D \in \langle \mathcal{V} \rangle$. Esto implica que $D \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ y $D \cap W \neq \emptyset$. Así, $W \cap (\bigcup \mathcal{V}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $F_n(X)$ es un espacio de Hausdorff.

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Observemos que $\{x\}, \{y\} \in F_n(X)$ y $\{x\} \neq \{y\}$. De suponer que el n-ésimo producto simétrico de X es de Hausdorff, se tiene que existen $\mathsf{O}, \mathsf{Q} \in \tau_{F_n(X)}$ tales que $\{x\} \in \mathsf{O}$, $\{y\} \in \mathsf{Q}$ y $\mathsf{O} \cap \mathsf{Q} = \emptyset$. Por lo que existen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tales que $\{x\} \in \langle \mathcal{U} \rangle \subseteq \mathsf{O}$ y $\{y\} \in \langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \mathsf{Q}$. Notemos que $x \in \bigcap \mathcal{U} \in \tau_X$ y $y \in \bigcap \mathcal{V} \in \tau_X$. Por otro lado, si existe $z \in \bigcap \mathcal{U} \cap \bigcap \mathcal{V}$, entonces se deduce que $\{z\} \in \langle \mathcal{U} \rangle \cap \langle \mathcal{V} \rangle$. Esto nos lleva a que $\mathsf{O} \cap \mathsf{Q} \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Concluimos que $\bigcap \mathcal{U} \cap \bigcap \mathcal{V} = \emptyset$ y por tanto, X es un espacio de Hausdorff.

□

Proposición 4.6. *Sean (X, τ_X) un espacio de Hausdorff y $\mathcal{W} \in [\tau_X^*]^{<\infty}$. Entonces $\langle \mathcal{W} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$.*

Demostración. Sea $A \in \langle \mathcal{W} \rangle$. Sabemos por la Proposición 4.4 que existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $A \in \langle \mathcal{V} \rangle$ y $|A| = |\mathcal{V}|$. Esto implica que para cada $a \in A$, existe un único $V_a \in \mathcal{V}$ tal que $a \in V_a$. Ahora, para cada $a \in A$, sea $\mathcal{W}_a = \{W \in \mathcal{W} : a \in W\}$. Notemos que $\mathcal{W}_a \neq \emptyset$ y $|\mathcal{W}_a| < \infty$ para toda $a \in A$. Consideremos $U_a = (\bigcap \mathcal{W}_a) \cap V_a \in \tau_X$ y $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$. De esta manera, $A \in \langle \mathcal{U} \rangle \in \beta$. Obsérvese que $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \bigcup \{\bigcap \mathcal{W}_a : a \in A\} \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. Por otro lado, sea $W \in \mathcal{W}$. Sabemos que existe $a \in A$ tal que $a \in W$. Por tanto, $W \in \mathcal{W}_a$. Dado que $U_a \subseteq \bigcap \mathcal{W}_a \subseteq W$, lo anterior y la Proposición 4.2 implican que $\langle \mathcal{U} \rangle \subseteq \langle \mathcal{W} \rangle$. Así, $A \in \mathrm{Int}_{F_n(X)} \langle \mathcal{W} \rangle$. Esto y la Proposición 1.10 garantizan que $\langle \mathcal{W} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$.

□

Proposición 4.7. *Sean (X, τ_X) un espacio de Hausdorff y $W \subseteq X$. Se satisfacen las siguientes proposiciones:*
a) $W \in \tau_X$ si y sólo si $\langle \{W\} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$.
b) Si $W \in \tau_X$, entonces $W^- = \{A \in F_n(X) : A \cap W \neq \emptyset\} \in \tau_{F_n(X)}$.

Demostración. *a*) Por la Proposición 4.6 solo basta probar que W es un subconjunto abierto de X, siempre que $\langle \{W\} \rangle$ lo sea en $F_n(X)$. Veremos que $W \subseteq \mathrm{Int}_X W$. Sea $z \in W$. Entonces $\{z\} \in \langle \{W\} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$. La Proposición 4.4 nos asegura la existencia de $V \in \tau_X$ tal que $\{z\} \in \langle \{V\} \rangle \subseteq \langle \{W\} \rangle$. Del

Corolario 4.3 se sigue que $z \in V \subseteq W$. Concluimos que $z \in \mathrm{Int}_X W$.

b) Sea $W \in \tau_X$. Notemos que $W^- = \{A \in F_n(X) : A \cap W \neq \emptyset\} = \{A \in F_n(X) : A \subseteq X \text{ y } A \cap W \neq \emptyset\} = \langle\{X, W\}\rangle$. Esto y la Proposición 4.6 implican que $W^- \in \tau_{F_n(X)}$. □

Lema 4.8. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico y $\mathcal{A} \in [P(X)]^{<\infty}$. Entonces:*
a) $\langle\mathcal{A}\rangle \cap \langle\{X \setminus \mathrm{Cl}_X D\}\rangle = \emptyset$ *para todo* $D \in \mathcal{A}$.
b) $\langle\mathcal{A}\rangle \cap (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D)^- = \emptyset$.

Demostración. *a*) Sea $D \in \mathcal{A}$. Supongamos que existe $E \in \langle\mathcal{A}\rangle$ tal que $E \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}_X D \subseteq X \setminus D$. Dado que $E \in \langle\mathcal{A}\rangle$, se tiene que $E \cap D \neq \emptyset$, lo cual nos lleva a una contradicción. Por tanto, $\langle\mathcal{A}\rangle \cap \langle\{X \setminus \mathrm{Cl}_X D\}\rangle = \emptyset$.

b) Supongamos que existe $E \in \langle\mathcal{A}\rangle$ tal que $E \cap (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D) \neq \emptyset$. De esto, se obtiene que existe $e \in E$ tal que $e \in (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D) \subseteq (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} D) = (X \setminus \bigcup \mathcal{A})$. Por otra parte, dado que $E \in \langle\mathcal{A}\rangle$, tenemos que $e \in E \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $\langle\mathcal{A}\rangle \cap (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D)^- = \emptyset$.
□

Proposición 4.9. *Sean (X, τ_X) un espacio de Hausdorff y $\mathcal{A} \in [P(X)]^{<\infty}$. Entonces, $\mathrm{Cl}_{F_n(X)}\langle\mathcal{A}\rangle \subseteq \langle\{\mathrm{Cl}_X D : D \in \mathcal{A}\}\rangle$. Si $|\mathcal{A}| \leq n$ y $\mathrm{Cl}_X C \cap \mathrm{Cl}_X D = \emptyset$ para cualesquiera $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $C \neq D$, la igualdad se satisface.*

Demostración. Sean $B \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)}\langle\mathcal{A}\rangle$ y $b \in B$. Supongamos que $b \notin \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D$. De esto y del Corolario 1.13 obtenemos que $b \in (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D) \in \tau_X$. Así, $B \in (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D)^-$. De la hipótesis se sigue que $\langle\mathcal{A}\rangle \cap (X \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{A}} \mathrm{Cl}_X D)^- \neq \emptyset$, lo que contradice el Lema 4.8. Por otra parte, si existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $B \cap \mathrm{Cl}_X D = \emptyset$, entonces $B \subseteq (X \setminus \mathrm{Cl}_X D) \in \tau_X$. Es decir, $B \in \langle\{X \setminus \mathrm{Cl}_X D\}\rangle \in \tau_{F_n(X)}$. Dado que $B \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)}\langle\mathcal{A}\rangle$, se tiene que $\langle\mathcal{A}\rangle \cap \langle\{X \setminus \mathrm{Cl}_X D\}\rangle \neq \emptyset$. Esto contradice al Lema 4.8. Por tanto, $B \cap \mathrm{Cl}_X D \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{A}$. Concluimos que $B \in \langle\{\mathrm{Cl}_X D : D \in \mathcal{A}\}\rangle$.

Ahora supongamos que $|\mathcal{A}| \leq n$ y $\mathrm{Cl}_X C \cap \mathrm{Cl}_X D = \emptyset$ para $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $C \neq D$. Sean $B \in \langle \{\mathrm{Cl}_X D : D \in \mathcal{A}\} \rangle$ y $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_n(X)$ de modo que $|\mathcal{W}| = |B|$ y $B \in \langle \mathcal{W} \rangle$. Notemos que $|B| \geq |\{\mathrm{Cl}_X D : D \in \mathcal{A}\}| = |\mathcal{A}|$. Con lo que definimos $h : \mathcal{W} \to B$ una función biyectiva tal que $h(W) \in W$ y $G : B \to \mathcal{A}$ una función suprayectiva tal que $b \in \mathrm{Cl}_X G(b)$. Observemos que $h(W) \in \mathrm{Cl}_X G(h(W))$. Dado que $h(W) \in W$ y $W \in \tau_X$, se tiene que $W \cap G(h(W)) \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{W}$. Sea $e_W \in W \cap G(h(W))$ y $E = \{e_W : W \in \mathcal{W}\}$. Nótese que $|E| = |\mathcal{W}| \leq n$. Ahora veamos que $E \in \langle \mathcal{W} \rangle \cap \langle \mathcal{A} \rangle$. Sea $W \in \mathcal{W}$. Entonces $e_W \in W \cap G(h(W)) \subseteq \bigcup \mathcal{W} \cap \bigcup \mathcal{A}$. Observemos que $W \cap E \neq \emptyset$. Así $E \in \langle \mathcal{W} \rangle$ Por otro lado, sea $D \in \mathcal{A}$. Por ser G suprayectiva, existe $b \in B$ tal que $G(b) = D$, y por ser h suprayectiva, existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $h(W) = b$. Sabemos que $e_W \in W \cap G(h(W))$. Por tanto, $e_W \in G(h(W)) = G(b) = D$ y así, $D \cap E \neq \emptyset$. De lo anterior se obtiene que $E \in \langle \mathcal{A} \rangle$. Esto prueba que $B \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)} \langle \mathcal{A} \rangle$.

□

Proposición 4.10. *Sean (X, τ_X) un espacio de Hausdorff y $\mathcal{W}$ una familia finita de subconjuntos cerrados de X. Entonces $\langle \mathcal{W} \rangle$ es cerrado en $F_n(X)$.*

Demostración. Probaremos que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} \langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \langle \mathcal{W} \rangle$. Sean $B \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)} \langle \mathcal{W} \rangle$, $b \in B$ y $U \in \tau_X$ tal que $b \in U$. Notemos que $B \in U^- \in \tau_{F_n(X)}$. Por tanto, $U^- \cap \langle \mathcal{W} \rangle \neq \emptyset$, es decir, existe $D \in F_n(X)$ tal que $D \cap U \neq \emptyset, D \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y $D \cap W \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{W}$. Así, $\emptyset \neq D \cap U \subseteq (\bigcup \mathcal{W}) \cap U$. Esto y el Corolario 1.13 implican que $b \in \mathrm{Cl}_X(\bigcup \mathcal{W}) = \bigcup \{\mathrm{Cl}_X W : W \in \mathcal{W}\} = \bigcup \mathcal{W}$. Por otro lado, sea $W \in \mathcal{W}$. Supongamos que $B \cap W = \emptyset$. Entonces $B \subseteq X \setminus W = X \setminus \mathrm{Cl}_X W \in \tau_X$. Por tanto, $B \in \langle \{X \setminus \mathrm{Cl}_X W\} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$. De esto y de la hipótesis se tiene que $\langle \mathcal{W} \rangle \cap \langle \{X \setminus \mathrm{Cl}_X W\} \rangle \neq \emptyset$, lo que contradice al Lema 4.8. Por tanto, $W \cap B \neq \emptyset$. Lo anterior demuestra que $B \in \langle \mathcal{W} \rangle$ y así, $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} \langle \mathcal{W} \rangle = \langle \mathcal{W} \rangle$. De la Proposición 1.10, concluimos que $\langle \mathcal{W} \rangle$ es un subconjunto cerrado de $F_n(X)$.

□

4.2. Funciones inducidas al n-ésimo producto simétrico

Los productos simétricos de dos espacios topológicos nos permiten establecer correspondencias que dependen de una función entre estos espacios, tal como se muestra enseguida. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Definimos la ***función inducida al n-ésimo producto simétrico por*** f como: $f_n : F_n(X) \to F_n(Y)$ dada por

$$f_n(A) = f(A).$$

Resulta interesante estudiar la relación que puede existir entre f y f_n en cuanto a pertenecer a una clase de funciones. Así que este capítulo esta destinado al análisis sobre dicha relación con las siguientes clases de funciones: abiertas, inductivamente abiertas, casi abiertas, pseudo abiertas, cociente, semi abiertas y denso abiertas.

Sean X y Y conjuntos, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{W} \subseteq P(Y)$. Denotemos por $f^{-1}[\mathcal{W}] = \{f^{-1}[W] : W \in \mathcal{W}\}$.

Proposición 4.11. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{W} \subseteq P(Y)$. Entonces $f_n^{-1}[\langle \mathcal{W} \rangle] = \langle f^{-1}[\mathcal{W}] \rangle$.*

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f_n^{-1}[\langle \mathcal{W} \rangle] = & \; \{A \in F_n(X) : f_n(A) = f(A) \in \langle \mathcal{W} \rangle\} \\ = & \; \{A \in F_n(X) : f(A) \subseteq \bigcup \mathcal{W} \text{ y } f(A) \cap W \neq \emptyset \ \forall\, W \in \mathcal{W}\} \\ = & \; \{A \in F_n(X) : A \subseteq f^{-1}[\bigcup \mathcal{W}] \text{ y } A \cap f^{-1}[W] \neq \emptyset \ \forall\, W \in \mathcal{W}\} \\ = & \; \{A \in F_n(X) : A \subseteq \bigcup f^{-1}[\mathcal{W}] \text{ y } A \cap f^{-1}[W] \neq \emptyset \ \forall\, W \in \mathcal{W}\} \\ = & \; \langle f^{-1}[\mathcal{W}] \rangle. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.12. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función y $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es continua si y solo si f_n es continua.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(Y)$. Sabemos que $f^{-1}[V] \in \tau_X$ para todo $V \in \mathcal{V}$. De la Proposición 4.6 se tiene que $\langle \{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$. Esto y la Proposición 4.11 implican que $f_n^{-1}[\langle \mathcal{V} \rangle] \in \tau_{F_n(X)}$. Lo que demuestra que f_n es continua.

$\Leftarrow$) Sea $U \in \tau_Y$. Entonces $\langle \{U\} \rangle \in \tau_{F_n(Y)}$. Dado que f_n es continua, de la Proposición 4.11 se sigue que $f_n^{-1}[\langle \{U\} \rangle] = \langle \{f^{-1}[U]\} \rangle \in \tau_{F_n(X)}$. La Proposición 4.7 implica que $f^{-1}[U] \in \tau_X$. Concluimos que f es continua.

□

Proposición 4.13. *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{W} \in [P(Y)]^{<\infty}$. Entonces:*
a) $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle \mathcal{W} \rangle] \subseteq \langle \{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W] : W \in \mathcal{W}\} \rangle$
b) $f_n^{-1}[\mathrm{Cl}_{F_n(Y)} \langle \mathcal{W} \rangle] \subseteq \langle \{f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W] : W \in \mathcal{W}\} \rangle$.

Demostración. *a)* De la Proposición 4.11 se obtiene que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle \mathcal{W} \rangle] = \mathrm{Cl}_{F_n(X)} \langle f^{-1}[\mathcal{W}] \rangle$. Esto y la Proposición 4.9 implican que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle \mathcal{W} \rangle] \subseteq \langle \{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W] : W \in \mathcal{W}\} \rangle$.

b) De la Proposición 4.9 se sigue que $f_n^{-1}[\mathrm{Cl}_{F_n(Y)} \langle \mathcal{W} \rangle] \subseteq f_n^{-1}[\langle \{\mathrm{Cl}_Y W : W \in \mathcal{W}\} \rangle]$. Esto y la Proposición 4.11 implican que $f_n^{-1}[\mathrm{Cl}_{F_n(Y)} \langle \mathcal{W} \rangle] \subseteq \langle \{f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W] : W \in \mathcal{W}\} \rangle$.

$\square$

Proposición 4.14. *Sean (X,τ_X) y (Y,τ_Y) espacios de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función, $\mathcal{U} \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n(\langle \mathcal{U} \rangle) \subseteq \langle \{f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle$. Si $|\mathcal{U}| \leq 2$ ó bien, $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ para $U, V \in \mathcal{U}, U \neq V$, la igualdad se satisface.*

Demostración. Sea $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Dado que $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, tenemos que $f(A) \subseteq f(\bigcup \mathcal{U}) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f(U)$. Por otro lado, sea $U \in \mathcal{U}$. Sabemos que $A \cap U \neq \emptyset$. Así, $f(A \cap U) \neq \emptyset$. Como $f(A \cap U) \subseteq f(A) \cap f(U)$, concluimos que $f(A) \cap f(U) \neq \emptyset$. Lo anterior prueba que $f_n(\langle \mathcal{U} \rangle) \subseteq \langle \{f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle$.

Ahora supongamos que $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ para $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $U \neq V$. Sea $B \in \langle \{f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle$. Dado que $\{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia de elementos ajenos, se tiene que $|B| \geqslant |\{f(U) : U \in \mathcal{U}\}| = |\mathcal{U}|$. Sean $G : B \longrightarrow \mathcal{U}$ y $h : B \longrightarrow X$ funciones tales que G es suprayectiva, $b \in f(G(b))$ y $h(b) \in f^{-1}[b] \cap G(b)$. Observemos que $f \circ h(b) = f(h(b)) \in f(f^{-1}[b] \cap G(b)) \subseteq f(f^{-1}[b]) \cap f(G(b)) = \{b\} \cap f(G(b)) = \{b\}$, es decir, $f \circ h|_B = id|_B$. Consideremos $A = \{h(b) : b \in B\}$. Así, $|A| = |B| \leq n$ y $f_n(A) = B$. Veremos que $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Sea $b \in B$. Entonces $h(b) \in G(b) \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ y así, $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$. Por otro lado, sea $U \in \mathcal{U}$. Sabemos que existe $b \in B$ tal que $G(b) = U$. Dado que $h(b) \in A$ y $h(b) \in f^{-1}[b] \cap G(b) \subseteq G(b) = U$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$. De lo anterior obtenemos que $B \in f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$. Por tanto, $\langle \{f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle \subseteq f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$.

Finalmente, supongamos que $|\mathcal{U}| \leq 2$. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ y $D \in F_n(X)$ tal que $D \in \langle \{f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle$. Si $|D| \geq 2$, entonces $|D| \geq |\mathcal{U}|$. Similarmente como en el párrafo anterior, se obtiene que $\langle\{f(U) : U \in \mathcal{U}\}\rangle \subseteq f_n(\langle\mathcal{U}\rangle)$. Si $|D| = 1$, entonces $D = \{d\}$ para algún $d \in X$. Dado que $d \in f(U_i)$ para $i = 1, 2$, existe $a_i \in U_i$ tal que $f(a_i) = d$. Por tanto, $A = \{a_1, a_2\} \in \langle\mathcal{U}\rangle$ y $f_n(A) = D$. Es decir, $D \in f_n(\langle\mathcal{U}\rangle)$. Concluimos que $f_n(\langle\mathcal{U}\rangle) = \langle\{f(U) : U \in \mathcal{U}\}\rangle$.

$\square$

Proposición 4.15. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, $B \in F_n(Y)$ y $A \in f_n^{-1}(B)$ tal que $|A| = |B|$. Si $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)$ es tal que $|\mathcal{U}| = |A|$ y $A \in \langle\mathcal{U}\rangle$, entonces existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $|A| = |\mathcal{V}|$, $A \in \langle\mathcal{V}\rangle \subseteq \langle\mathcal{U}\rangle$ y $f(O) \cap f(P) = \emptyset$ siempre que $O, P \in \mathcal{V}$ y $O \neq P$.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 4.4 que existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_n(Y)$ tal que $B \in \langle\mathcal{W}\rangle \subseteq \langle\{X\}\rangle$ y $|B| = |\mathcal{W}|$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un único $W_U \in \mathcal{W}$ tal que si $a \in A \cap U$, entonces $f(a) \in W_U \cap B$. Definimos $V_U = U \cap f^{-1}[W_U]$ para cada $U \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$. Veremos que $\mathcal{V}$ cumple las condiciones deseadas.

Primero, se tiene que $|\mathcal{V}| = |\mathcal{U}| = |A|$. Luego, de Proposición 4.2 se sigue que $\langle\mathcal{V}\rangle \subseteq \langle\mathcal{U}\rangle$. Ahora, si $a \in A$, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $a \in U$ y así $f(a) \in W_U$, esto implica que $a \in V_U$. Concluimos que $A \subseteq \bigcup\mathcal{V}$. Para $U \in \mathcal{U}$, sea $x \in A$ tal que $x \in U$. Entonces $f(x) \in W_U$ y de ahí obtenemos que $x \in V_U \cap A$. Así, $A \in \langle\mathcal{V}\rangle$. Finalmente, sean $O, P \in \mathcal{V}$ tales que $O \neq P$. Entonces existen $U, T \in \mathcal{U}$ tales que $U \neq T$, $O = V_U$ y $P = V_T$. Por lo que $f(O) \subseteq W_U$, $f(P) \subseteq W_T$ y $W_U \cap W_T = \emptyset$. Esto implica que $f(O) \cap f(P) \subseteq W_U \cap W_T = \emptyset$.

$\square$

Proposición 4.16. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es suprayectiva si y solo si f_n es suprayectiva.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $B \in F_n(Y)$. Dado que f es suprayectiva, existe $g : B \to X$ función tal que $g(b) \in f^{-1}[b]$ para todo $b \in B$. Sea $A = \{g(b) : b \in B\}$. Notemos que $|A| = |B|$ y $f_n(A) = \{f(g(b)) : b \in B\} = \{b : b \in B\} = B$. Por lo tanto, f_n es suprayectiva.

$\Leftarrow$) Sea $y \in Y$. Dado que $\{y\} \in F_n(Y)$ y f_n es suprayectiva, existe $A \in F_n(X)$ tal que $f_n(A) = \{y\}$. Por tanto, $f(a) = y$ para todo $a \in A$. Concluimos que f es suprayectiva.

$\square$

4.2.1. Funciones inducidas de funciones abiertas

Teorema 4.17. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Se verifican las siguientes proposiciones:*

a) La función f es abierta si y solo si f_2 es abierta.

b) Si X es un espacio compacto, Y tiene al menos dos puntos no aislados y f_n es una función abierta para algún $n \geq 3$, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. *a)* $\Rightarrow$) Sea $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_2(X)$. De la Proposición 4.14 se sigue que $f_2(\langle \mathcal{W} \rangle) = \langle \{f(W) : W \in \mathcal{W}\} \rangle$. Dado que f es una función abierta, de la Proposición 4.6 se sigue que $f_2(\langle \mathcal{W} \rangle) \in \tau_{F_2(X)}$. Concluimos que f_2 es abierta.

$\Leftarrow$) Supongamos que f_2 es abierta. Sea $U \in \tau_X$. Notemos que $\langle \{U\} \rangle \in \tau_{F_2(X)}$. De esto y de la Proposición 4.14 se sigue que $f_2(\langle \{U\} \rangle) = \langle \{f(U)\} \rangle \in \tau_{F_2(X)}$. La Proposición 4.7 garantiza que $f(U) \in \tau_Y$. Lo que prueba que f es una función abierta.

b) Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Supongamos que $x_1 \neq x_2$. Sea $z \in Y$ tal que $z \neq y$ y z es un punto no aislado de Y. Por ser f suprayectiva, sabemos que existe $x_3 \in X$ tal que $f(x_3) = z$. Sea $n \geq 3$, de la Proposición 4.4 se tiene que existe $\mathcal{U} = \{U_i : x_i \in U_i, i = 1, 2, 3\} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $\{x_1, x_2, x_3\} \in \langle \mathcal{U} \rangle$. De la hipótesis se sigue que $\{f(x_i) : i = 1, 2, 3\} = \{y, z\} \in f_n(\langle \mathcal{U} \rangle) = \mathrm{Int}_{F_n(Y)} f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$, por lo que existen $V, W \in \tau_Y$ tales que $V \cap W = \emptyset$ y $\{y, z\} \in \langle \{V, W\} \rangle \subseteq f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$. Sin perder generalidad, supongamos que $y \in V$ y $z \in W$. La Proposición 4.14 garantiza que $\langle \{V, W\} \rangle \subseteq \langle \{f(U_i) : i = 1, 2, 3\} \rangle$. De la Proposición 4.2 inciso *a)* deducimos que $V \subseteq f(U_1) \cap f(U_2)$ y $W \subseteq f(U_3)$. Sean $y_1 \in V$ y $y_2, y_3, ..., y_{n-1} \in W$ de modo que $y_i \neq y_j$ para todo $i \neq j$. Note que $\{y_i : i = 1, 2, ..., n\} \in \langle \{V, W\} \rangle$, pero no existe $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$ tal que $f_n(A) = \{y_i : i = 1, 2, ..., n\}$, lo cual es una una contradición. Por tanto $x_1 = x_2$, lo que prueba que f es inyectiva. Dado que f es una función biyectiva de un espacio compacto en un espacio T_2, concluimos que f es un homeomorfismo. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que existen (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función abierta de tal manera que f_n no es una funcíon abierta para $n \geq 3$.

Ejemplo 4.18. *Consideremos a* $\mathbb{R}$ *dotado de la topología usual y* $[0,\infty)$ *como subespacio de* $\mathbb{R}$. *Definimos* $f : (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}) \to ([0,\infty), \tau_U)$ *dada por* $f(x) = |x|$. *Veremos que* f *es abierta y que* f_n *no es abierta para* $n \geq 3$.

Notemos que f es suprayectiva. Ahora, observemos que si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$, entonces $f^{-1}[[0,a)] = (-a,a) \in \tau_{\mathbb{R}}$ y $f^{-1}[(a,b)] = (a,b) \cup (-b,-a) \in \tau_{\mathbb{R}}$. Es decir, la función f es continua.
Por otro lado, sean $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $a < b$. Se tiene que:

- $f[(a,b)] = (a,b) \in \tau_U$, si $0 \leq a$.
- $f[(a,b)] = (|b|,|a|) \in \tau_U$, si $b \leq 0$.
- $f[(a,b)] = [0,|a|) \in \tau_U$, si $a < 0 < b$ y $|a| \geq |b|$.
- $f[(a,b)] = [0,b) \in \tau_U$, si $a < 0 < b$ y $|a| \leq |b|$.

Esto prueba que f es una función abierta.

Ahora, sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$, $I = \{k \in \mathbb{N} : k < n/2\}$ y $\mathcal{U} = \{(-(k+1),-k) : k \in I\} \cup \{(-1,1)\} \cup \{(k,k+1) : k \in I\} \in \mathfrak{C}_n(\mathbb{R})$. Observemos que $\{-(k+1/2), 0, k+1/2 : k \in I\} \in \langle \mathcal{U} \rangle$. Así, $f_n(\{-(k+1/2), 0, k+1/2 : k \in I\}) = \{0, k+1/2 : k \in I\} \in f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$. Veremos que $B = \{0, k+1/2 : k \in I\} \notin \mathrm{Int}_{F_n([0,\infty))} f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$. Sean $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tales que $k \in I$ y $k+1/2 \in (a_k, b_k) \subseteq (k, k+1)$. De esta manera, $B \in \langle \{(a_k, b_k) : k \in I\} \cup \{[0,a_0)\} \rangle \in \tau_{F_n([0,\infty))}$. Para cada $k \in I$ elegimos $y_k \in (a_k, b_k)$. Sean $J = \{j \in \mathbb{N} : j \notin I \text{ y } j \leq n\}$ y $y_j \in (0, a_0)$ tales que $j \in J$ y $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. Así $|\{y_m : m \in I \cup J\}| = n$. Notemos que $\{y_m : m \in I \cup J\} \in \langle \{(a_k, b_k) : k \in I\} \cup \{[0,a_0)\} \rangle$, pero no existe $A \in \langle \mathcal{U} \rangle$ tal que $f_n(A) = \{y_m : m \in I \cup J\}$. Esto quiere decir que $\langle \{(a_k, b_k) : k \in I\} \cup [0,a_0) \rangle \nsubseteq f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$. Concluimos que $f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$ no es un subconjunto abierto de $[0,\infty)$ y por tanto, f_n no es una función abierta.

Observación 4.19. *Nótese que* $\langle \{\mathrm{Int}_{[0,\infty)} f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle = \langle \{[0,1), (k,k+1) : k \in I\} \rangle$. *Así,* $B \in \langle \{\mathrm{Int}_{[0,\infty)} f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle$. *Dado que* $B \notin f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$, *concluimos que* $\langle \{\mathrm{Int}_{[0,\infty)} f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle \nsubseteq f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$.

4.2.2. Funciones inducidas de funciones inductivamente abiertas

Lema 4.20. *Sean* (X, τ_X) *un espacio de Hausdorff,* $Z \subseteq X$ *y* $\mathcal{W} \in [\tau_X]^{<n+1}$. *Entonces* $\langle \mathcal{W} \rangle \cap \langle \{Z\} \rangle = \langle \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \rangle$.

Demostración. Sea $A \in \langle \mathcal{W} \rangle \cap \langle \{Z\} \rangle$. Entonces $A \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y $A \subseteq Z$. Así, $A \subseteq \bigcup \mathcal{W} \cap Z = \bigcup \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\}$. Ahora, sea $W \in \mathcal{W}$. Notemos que $A \cap W = (A \cap Z) \cap W = A \cap (W \cap Z)$. Dado que $A \cap W \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap (W \cap Z) \neq \emptyset$. Esto prueba que $A \in \langle \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \rangle$. Por otro lado, observemos que $\bigcup \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ y $\bigcup \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \subseteq Z$. Además, para cada $W \in \mathcal{W}$ se tiene que $W \cap Z \subseteq W$ y $W \cap Z \subseteq Z$. De esto y de la Proposición 4.2 obtenemos que $\langle \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \rangle \subseteq \langle \mathcal{W} \rangle$ y $\langle \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \rangle \subseteq \langle \{Z\} \rangle$. Concluimos que $\langle \mathcal{W} \rangle \cap \langle \{Z\} \rangle = \langle \{W \cap Z : W \in \mathcal{W}\} \rangle$. $\square$

Teorema 4.21. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Se verifican las siguientes proposiciones:*
a) Si f es inductivamente abierta, entonces f_2 es inductivamente abierta.
b) Si para algún $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{\mathcal{Z} \subseteq F_n(X) : f_n(\mathcal{Z}) = F_n(Y), f_n|_{\mathcal{Z}}$ es abierta y $\mathcal{Z} \cap F_1(X) = F_1(\bigcup \mathcal{Z})\} \neq \emptyset$, entonces f es inductivamente abierta.

Demostración. *a*) Sea $n = 2$. Supongamos que existe $Z \subseteq X$ tal que $f(Z) = Y$ y $f|_Z$ es abierta. Sea $\mathcal{Z} = \langle \{Z\} \rangle \subseteq F_2(X)$. Notemos que si $B \in F_2(Y)$, existe $g : B \to Z$ una función tal que $f(g(b)) = b$. Así, $\{g(b) : b \in B\} \in \mathcal{Z}$ y $f_2(\{g(b) : b \in B\}) = B$. Esto garantiza que $f_2(\mathcal{Z}) = F_2(Y)$. Ahora veremos que $f_2|_{\mathcal{Z}}$ es abierta. Sean $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}_2(X)$ y $\mathcal{O} = \langle \mathcal{U} \rangle \cap \mathcal{Z} \in \tau_{\mathcal{Z}}$. El Lema 4.20 implica que $f_2(\mathcal{O}) = f_2(\langle \{U \cap Z : U \in \mathcal{U}\} \rangle)$. De esto y de la Proposición 4.14 se sigue que $f_2(\mathcal{O}) = \langle \{f(U \cap Z) : U \in \mathcal{U}\} \rangle$. Sabemos que $f(U \cap Z) \in \tau_Y$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Así que la Proposición 4.6 garantiza que $f_2(\mathcal{O}) \in \tau_{F_2(Y)}$. Lo anterior demuestra que f_2 es inductivamente abierta.

b) Supongamos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{Z} \subseteq F_n(X)$ tales que $\mathcal{Z} \cap F_1(X) = F_1(\bigcup \mathcal{Z})$, $f_n(\mathcal{Z}) = F_n(Y)$ y $f_n|_{\mathcal{Z}}$ es una función abierta. Sean $Z = \bigcup \mathcal{Z}$ y $y \in Y$. Sabemos que para $\{y\} \in F_n(Y)$, existe $A \in \mathcal{Z}$ tal que $f(A) = \{y\}$. En particular, si $a \in A \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$, entonces $f(a) = y \in f(Z)$. Esto implica que $f(Z) = Y$. Ahora veremos que $f|_Z$ es abierta. Sea $U \in \tau_Z$. Entonces existe $W \in \tau_X$ tal que $U = W \cap Z$. Sea $p \in f(U)$. Tenemos que existe $x \in W \cap Z$ tal que $f(x) = p$. Obsérvese que $\{x\} \in F_1(\bigcup \mathcal{Z})$. Por tanto, $\{x\} \in \langle \{W\} \rangle \cap \mathcal{Z} \in \tau_{\mathcal{Z}}$. Así, $f_n(\{x\}) = \{p\} \in \mathrm{Int}_{F_n(Y)} f_n(\langle \{W\} \rangle \cap \mathcal{Z})$, es decir, existe $V \in \tau_Y$ tal que $\{p\} \in \langle \{V\} \rangle \subseteq f_n(\langle \{W\} \rangle \cap \mathcal{Z})$. Veremos que $V \subseteq f(U)$. Sea $z \in V$. Dado que $\{z\} \in \langle \{V\} \rangle$, se tiene que existe $D \in \langle \{W\} \rangle \cap \mathcal{Z}$ de modo que $f_n(D) = \{z\}$. Por tanto $D \subseteq W \cap (\bigcup \mathcal{Z}) = W \cap Z = U$ y así, $z \in f(U)$. Esto prueba que $p \in \mathrm{Int}_Y f(U)$, es decir, $f(U) \in \tau_Y$. Concluimos que f es inductivamente abierta.

$\square$

4.2.3. Funciones inducidas de funciones casi abiertas

El siguiente resultado ha sido probado en [1, Teorema 3.2, pág. 103]. En la demostración se emplea el [1, Lema 2.3, pág. 102], el cual no siempre es cierto. El ejemplo 4.18 y la Observación 4.19 muestran que existen espacios Hausdorff (X, τ_X), (Y, τ_Y), $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{C}_n(X)$ tales que $\langle \{\mathrm{Int}_Y f(U) : U \in \mathcal{U}\} \rangle \not\subseteq f_n(\langle \mathcal{U} \rangle)$, lo que contradice [1, Lema 2.3, pág. 102]. Y por tanto, [1, Teorema 3.2, pág. 103] no garantiza que f_n sea una función casi abierta cuando f lo es.

Teorema 4.22. *Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es casi abierta si solo si f_n es casi abierta.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $B \in F_n(Y)$. De suponer que f es casi abierta y del Teorema 2.19, se tiene que para cada $b \in B$ existe $a_b \in f^{-1}[b]$ tal que si $O \subseteq Y$ y $a_b \in \mathrm{Int}_X f^{-1}[O]$, entonces $b \in \mathrm{Int}_Y O$. Consideremos $A = \{a_b : b \in B\}$. Así, $A \in f_n^{-1}[B]$ y $|A| = |B|$. Sea $\mathsf{O} \subseteq F_n(Y)$ tal que $A \in \mathrm{Int}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\mathsf{O}]$. La Proposición 4.4 garantiza la existencia de $\mathcal{U} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $|\mathcal{U}| = |A|$ y $A \in \langle \mathcal{U} \rangle \subseteq f_n^{-1}[\mathsf{O}]$. De esto y de la Proposición 4.15 se sigue que existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{C}_n(X)$ de modo que $|\mathcal{V}| = |A|$, $A \in \langle \mathcal{V} \rangle \subseteq \langle \mathcal{U} \rangle$ y $f(O) \cap f(P) = \emptyset$ para $O, P \in \mathcal{V}$ tales que $O \neq P$. De aquí se deduce que $\mathcal{V} = \{V_b : b \in B\}$. Sin perder generalidad, supongamos que para cada $b \in B$, se tiene que $a_b \in V_b$. De esta manera, $a_b \in \mathrm{Int}_X V_b \subseteq \mathrm{Int}_X f^{-1}[f(V_b)]$ y por tanto, $b \in \mathrm{Int}_Y f(V_b)$ para todo $b \in B$. De esto y de la Proposición 4.6 obtenemos que $B \in \langle \{\mathrm{Int}_Y f(V_b) : b \in B\} \rangle \in \tau_{F_n(Y)}$. Luego, de la Proposición 4.2 se tiene que $\langle \{\mathrm{Int}_Y f(V_b) : b \in B \rangle \} = \langle \{\mathrm{Int}_Y f(V) : V \in \mathcal{V}\} \rangle \subseteq \langle \{f(V) : V \in \mathcal{V}\} \rangle$. Finalmente, sabemos que $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ para $U, V \in \mathcal{V}$ tales que $U \neq V$. Por tanto, de la Proposición 4.14, se sigue que $f_n(\langle \mathcal{V} \rangle) = \langle \{f(V) : V \in \mathcal{V}\} \rangle$. Con lo anterior concluimos que $B \in \langle \{\mathrm{Int}_Y f(V) : V \in \mathcal{V}\} \rangle \subseteq \langle \{f(V) : V \in \mathcal{V}\} \rangle = f_n(\langle \mathcal{V} \rangle) \subseteq f_n(\langle \mathcal{U} \rangle) \subseteq f_n(f_n^{-1}[\mathsf{O}]) = \mathsf{O}$, es decir, $B \in \mathrm{Int}_{F_n(Y)} \mathsf{O}$. Del Teorema 2.19 concluimos que f_n es casi abierta.

$\Leftarrow$) Sea $y \in Y$. Tenemos del Teorema 2.19 que para $\{y\} \in F_n(Y)$, existe $A \in f_n^{-1}[\{y\}]$ tal que si $\mathsf{B} \subseteq F_n(Y)$ y $\{y\} \in \mathrm{Cl}_{F_n(Y)} \mathsf{B}$, entonces $A \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\mathsf{B}]$. Sea $a \in A$ y $B \subseteq Y$ tal que $y \in \mathrm{Cl}_Y B$. Entonces $\{y\} \in$

$\langle\{\mathrm{Cl}_Y B\}\rangle$. De la Proposición 4.9 tenemos que $\langle\{\mathrm{Cl}_Y B\}\rangle = \mathrm{Cl}_{F_n(Y)}\langle\{B\}\rangle$. Por tanto, $A \in \mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle\{B\}\rangle]$. De la Proposición 4.13 se sigue que $A \in \langle\{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]\}\rangle$. Por tanto, $a \in A \subseteq \mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]$. Del Teorema 2.19 concluimos que f es una función casi abierta. □

4.2.4. Funciones inducidas de funciones pseudo abiertas

Teorema 4.23. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si $n \in \mathbb{N}$ y f_n es pseudo abierta, entonces f es pseudo abierta.*

Demostración. Sea $B \subseteq Y$. De la hipótesis y del Teorema 2.20 se obtiene que $\mathrm{Cl}_{F_n(Y)}\langle\{B\}\rangle = f_n(\mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle\{B\}\rangle])$. De las Proposiciones 4.13 y 4.14 se sigue que $\mathrm{Cl}_{F_n(Y)}\langle\{B\}\rangle \subseteq f_n(\langle\{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]\}\rangle) = \langle\{f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B])\}\rangle$. Dado que $\mathrm{Cl}_{F_n(Y)}\langle\{B\}\rangle = \langle\{\mathrm{Cl}_Y B\}\rangle$, de lo anterior obtenemos que $\langle\{\mathrm{Cl}_Y B\}\rangle = \langle\{f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B])\}\rangle$. Concluimos que $\mathrm{Cl}_Y B = f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B])$. Del Teorema 2.20 se obtiene que f es una función pseudo abierta.

□

4.2.5. Funciones inducidas de funciones cociente

Teorema 4.24. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si $n \in \mathbb{N}$ y f_n es cociente, entonces f es cociente.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}[V] \in \tau_X$. Sabemos de las Proposiciones 4.6 y 4.11 que $\langle\{f^{-1}[V]\}\rangle = f_n^{-1}[\langle\{V\}\rangle] \in \tau_{F_n(X)}$. Dado que f_n es una función cociente, se tiene que $\langle\{V\}\rangle \in \tau_{F_n(Y)}$. De la Proposición 4.7 se sigue que $V \in \tau_Y$. Concluimos que f es una función cociente.

□

Sea (X, τ_X) un espacio topológico.

1. X es ***primero numerable*** si para cada $x \in X$, existe una *Base local numerable de x*, es decir, existe $\beta_x \subseteq \tau_X$ a lo más numerable tal que si $x \in U \in \tau_X$, entonces existe $B \in \beta_x$ tal que $x \in B \subseteq U$.

2. X es ***Fréchet*** si para todo $A \subseteq X$;

$$x \in \mathrm{Cl}_X A \text{ si y solo si existe } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

3. X es ***Secuencial*** si para todo $A \subseteq X$ tal que $\mathrm{Cl}_X A \setminus A \neq \emptyset$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y existe $x \in X \setminus A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Proposición 4.25. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Se verifican las siguientes proposiciones.*
a) Si X es primero numerable, entonces $F_n(X)$ es primero numerable.
b) Si X es primero numerable, entonces X es Fréchet.
c) Si X es Fréchet, entonces X es secuencial.

Demostración. *a*) Sea $A \in F_n(X)$. Dado que X es primero numerable, para cada $a \in A$, existe $\beta_a = \{B_n^a\}_{n\in\mathbb{N}}$ base local para a. Sea $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos $V_n^a = \bigcap_{i=1}^{n} B_i^a$. Observemos que $a \in V_{n+1}^a \subseteq V_n^a \in \tau_X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\beta_A = \{\langle\{V_n^a : a \in A\}\rangle : n \in \mathbb{N}\}$. De la Proposición 4.6 se tiene que $\langle\{V_n^a : a \in A\}\rangle \in \tau_{F_n(X)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{O} \in \tau_{F_n(X)}$ tal que $A \in \mathcal{O}$. Sabemos que existe $\{W_a : a \in A\} \in \mathfrak{C}_n(X)$ tal que $A \in \langle\{W_a : a \in A\}\rangle \subseteq \mathcal{O}$ y $a \in W_a$ para todo $a \in A$. Por tanto, para cada $a \in A$, existe $k_a \in \mathbb{N}$ tal que $B_{k_a}^a \in \beta_a$ y $a \in B_{k_a}^a \subseteq W_a$. Sea $k = \text{máx}\{k_a : a \in A\}$. Así, $a \in V_k^a \subseteq V_{k_a}^a \subseteq B_{k_a}^a \subseteq W_a$ para todo $a \in A$. Esto y la Proposicón 4.2 implican que $A \in \langle\{V_k^a : a \in A\}\rangle \subseteq \langle\{W_a : a \in A\}\rangle \subseteq \mathcal{O}$. Lo anterior prueba que β_A es base local para A. Concluimos que $F_n(X)$ es primero numerable.

b) Sean $A \subseteq X$ y $x \in \mathrm{Cl}_X A$. Dado que X es primero numerable, existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base local para x. Definimos $V_n = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$. Nótese que $x \in V_{n+1} \subseteq V_n \in \tau_X$. Por tanto, $V_n \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in V_n \cap A$. De esta manera, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_k \subseteq U$. Dado que $x_n \in V_n \subseteq V_k \subseteq B_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$, se tiene que $x_n \in U$ para todo $n \geq k$.
Ahora, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ y $W \in \tau_X$ tal que $z \in W$. Se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$ para todo $n \geq k$. Dado que $x_n \in A$,

concluimos que $W \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que $z \in \mathrm{Cl}_X A$.

c) Sea $A \subseteq X$ tal que $\mathrm{Cl}_X A \setminus A \neq \emptyset$. Por tanto, existe $x \in \mathrm{Cl}_X A$ tal que $x \notin A$. Dado que X es un espacio Fréchet, se tiene que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Concluimos que X es secuencial.

□

Proposición 4.26. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva.*
a) Si f es pseudo abierta y X es Fréchet, entonces Y es Fréchet.
b) Si f es cociente y X es secuencial, entonces Y es secuencial.

Demostración. a) Sea $A \subseteq Y$ y $y \in \mathrm{Cl}_Y A$. Dado que f es pseudo abierta, del Teorema 2.20 se tiene que $\mathrm{Cl}_Y A = f(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[A])$. Por tanto, existe $x \in \mathrm{Cl}_X f^{-1}[A]$ tal que $f(x) = y$. Sabemos que X es Fréchet, por lo que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}[A]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Observemos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $y \in V$. Nótese que $x \in f^{-1}[V] \in \tau_X$. Por tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}[V]$ para todo $n \geq k$. Así, $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq k$.

Ahora, sea $A \subseteq Y$ de modo que existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $y \in V$. Por tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in V$ para todo $n \geq k$. Dado que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, tenemos que $V \cap A \neq \emptyset$. Lo que prueba que $y \in \mathrm{Cl}_Y A$.

b) Sea $A \subseteq Y$ tal que $(\mathrm{Cl}_Y A) \setminus A \neq \emptyset$. Supongamos que $(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[A]) \setminus f^{-1}[A] = \emptyset$. Esto implica que $f^{-1}[A]$ es un subconjunto cerrado de X. Por tanto, $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A] \in \tau_X$. Puesto que f es cociente, se tiene que $Y \setminus A \in \tau_Y$. Así, $A = \mathrm{Cl}_X A$, lo que nos lleva a una contradicción. Por tanto, $(\mathrm{Cl}_X f^{-1}[A]) \setminus f^{-1}[A] \neq \emptyset$. Dado que X es un espacio secuencial, tenemos que existen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}[A]$ y $x \in X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A]$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Nótese que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y $f(x) \in Y \setminus A$. Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in V$. Dado que $x \in f^{-1}[V] \in \tau_X$ se tiene que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}[V]$ para todo $n \geq k$. Así, $f(x_n) \in V$ para todo $n \geq k$.

□

Proposición 4.27. *Sean (X, τ_X) un espacio topológico secuencial y A un subconjunto cerrado de X. Entonces A es secuencial.*

Demostración. Sea $D \subseteq A$ tal que $(\mathrm{Cl}_A D) \setminus D \neq \emptyset$. Sabemos que $\mathrm{Cl}_A D = A \cap \mathrm{Cl}_X D$. Por tanto, $(\mathrm{Cl}_X D) \setminus D \neq \emptyset$. Se tiene que X es secuencial, por lo que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ y $x \in X \setminus D$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Veamos que $x \in A = \mathrm{Cl}_X A$. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq k$. Dado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ y $D \subseteq A$, tenemos que $U \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in A \setminus D$. Esto prueba que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en A. Concluimos que A es secuencial.

□

Proposición 4.28. *Sean $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, (X, τ_X) un espacio topológico y $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces $\langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$ es homeomorfo a $A \times B$. Si A, B son subconjuntos cerrados de X, entonces $\langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$ es cerrado en $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $g : A \times B \to \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$ definida por $g((a, b)) = \{a, b\}$. Notemos que $|D| = 2$ para todo $D \in \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Sea $\{d_1, d_2\} \in \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Dado que $A \cap B = \emptyset$, podemos suponer que $d_1 \in A$ y $d_2 \in B$ y así $(d_1, d_2) \in A \times B$. Por tanto, g es una función suprayectiva. Por otro lado, sean $(a, b), (c, d) \in A \times B$ tales que $g((a, b)) = g((c, d))$, es decir, $\{a, b\} = \{c, d\}$. Si $a = d$, entonces $a \in B$, es decir $A \cap B \neq \emptyset$, lo que nos lleva a una contradicción. Por tanto $a = c$ y $b = d$ y así, $(a, b) = (c, d)$. Esto prueba que g es inyectiva

Afirmación 4.29. *Si $\emptyset \neq U \subseteq A$ y $\emptyset \neq V \subseteq B$, entonces $g^{-1}[\langle\{U, V\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)] = U \times V$.*

Demostración. Notemos que $U \cap V = \emptyset$. Sea $(d_1, d_2) \in g^{-1}[\langle\{U, V\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)] \subseteq A \times B$. Entonces $g((d_1, d_2)) = \{d_1, d_2\} \in \langle\{U, V\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Dado que $d_1 \in A$ y $V \subseteq B$, necesariamente se tiene que $d_1 \in U$. Por tanto, $(d_1, d_2) \in U \times V$. Por otro lado, de la Proposición 4.2 tenemos que $\langle\{U, V\}\rangle \subseteq \langle\{A, B\}\rangle$. Sea $(d_1, d_2) \in U \times V$. Entonces $d_1 \in U$ y $d_2 \in V$. Así $g(d_1, d_2) \in \langle\{U, V\}\rangle \subseteq \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Por tanto, $(d_1, d_2) \in g^{-1}[\langle\{U, V\}\rangle \cap F_2(X)] = g^{-1}[\langle\{U, V\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)]$. De lo anterior obtenemos que $g^{-1}[\langle\{U, V\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)] = U \times V$. □

Ahora, sean $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}_n(X)$ y $\mathcal{O} = \langle\mathcal{W}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X) \in \tau_{\langle\{A,B\}\rangle\cap F_2(X)}$. Nótese que $\mathcal{O} = \emptyset$, si $|\mathcal{W}| \geq 3$. Por tanto, $\mathcal{W} = \{W_1, W_2\}$, donde $W_1 = W_2$ es posible. Sea $(d_1, d_2) \in g^{-1}[\mathcal{O}]$. Entonces $g((d_1, d_2)) = \{d_1, d_2\} \in \langle\{W_1, W_2\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Dado que $(d_1, d_2) \in A \times B$ y $\{d_1, d_2\} \in \langle\{W_1, W_2\}\rangle$, sin perder generalidad, concluimos que $d_1 \in W_1 \cap A$ y $d_2 \in W_2 \cap B$. Por tanto, $\{d_1, d_2\} \in \langle\{W_1 \cap A, W_2 \cap B\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. De la Afirmación 4.29 obtenemos que $(d_1, d_2) \in g^{-1}[\langle\{W_1 \cap A, W_2 \cap B\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)] = (W_1 \cap A) \times (W_2 \times B) \in \tau_{A\times B}$. De la Proposicíon 4.2 se tiene que $\langle\{W_1 \cap A, W_2 \cap B\}\rangle \subseteq \langle\{W_1, W_2\}\rangle$. Por tanto, $(d_1, d_2) \in (W_1 \cap A) \times (W_2 \cap B) = g^{-1}[\langle\{W_1 \cap A, W_2 \cap B\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)] \subseteq g^{-1}[\langle\{W_1, W_2\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)] = g^{-1}[\mathcal{O}]$. Es decir, $(d_1, d_2) \in \mathrm{Int}_{A\times B} g^{-1}[\mathcal{O}]$. Esto prueba que g es continua.

Ahora sea $U \in \tau_A^*$ y $V \in \tau_B^*$. De la Afirmación 4.29 se sigue que $g(U \times V) = g(g^{-1}[\langle\{U, V\}\rangle] \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)])$. Dado que g es suprayectiva concluimos que $g(U \times V) = \langle\{U, V\}\rangle \cap \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X) \in \tau_{\langle\{A,B\}\rangle \cap F_2(X)}$. Lo que prueba que g es una función abierta.

Finalmente, supongamos además que A y B son subconjuntos cerrados de X. De la Proposición 4.10 se tiene que $\langle\{A, B\}\rangle$ es un subconjunto cerrado de $F_n(X)$. Por otro lado, notemos que $\langle\{A, B\}\rangle_2 \subseteq \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Ahora, si $D \in \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$, entonces $|D| = 2$. Así, $D \in \langle\{A, B\}\rangle_2$. Concluimos que $\langle\{A, B\}\rangle_2 = \langle\{A, B\}\rangle \cap F_2(X)$. Dado que $F_2(X)$ es cerrado en $F_n(X)$, obtenemos que $\langle\{A, B\}\rangle_2 = F_2(X) \cap \langle\{A, B\}\rangle$ es un subconjunto cerrado de $F_n(X)$.
De lo anterior y del Teorema 1.18 se concluye que g es un homeomorfismo.

□

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del Terorema 4.23 y del Teorema 4.24 no siempre se satisfacen.

Ejemplo 4.30. *Consideremos $X_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y $X_2 = X_1 \times \mathbb{N}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Sea $Y_2 = \{(1/n, m/n) : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}$. Definimos $g : X_2 \to Y_2$ dada por $g(x, y) = (x, xy)$. Dotemos a Y_2 con la topología cociente determinada por la función g.
Sean $X = X_1 \bigoplus X_2$, $Y = X_1 \bigoplus Y_2$ y $f : X \to Y$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in X_1 \\ g(x), & si\ x \in X_2 \end{cases}$$

Veremos que f es pseudo abierta y que f_n no es una función cociente.

Sabemos que g es una función pseudo abierta (Ver ejemplo 2.10). Dado que $f|_{X_1}$ coincide con la función identidad sobre X_1, del Teorema 3.10 se obtiene que f es pseudo abierta. En seguida veremos que X es un espacio primero numerable. Observe que para cada $k \in \mathbb{N}$ y para cada $l \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{1/k\}$, $\{(1/k, l)\} \in \tau_X$. Por tanto, dichos subconjuntos son bases locales numerables de $1/k$ y $(1/k, l)$ respectivamente. Ahora, sea $\beta_0 = \{\{0\} \cup \{1/k : k \geq n\}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau_X$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $\beta_{(0,m)} = \{\{(0, m)\} \cup \{(1/k, m) : k \geq n\}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau_X$. De esta manera, β_0 y $\beta_{(0,m)}$ son bases locales numerables de 0 y $(0, m)$ respectivamente. De la Proposición 4.25 se obtiene que $F_n(X)$ es un espacio secuencial. Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f_n : F_n(X) \to F_n(Y)$ es una función cociente. Esto y la Proposición 4.26 implican que $F_n(Y)$ es un espacio secuencial.

Por otro lado, veamos que $(X_1, \tau_{X_1}) \times (Y_2, \tau_{Y_2})$ no es un espacio secuencial. Consideremos $A = \{(1/n, (1/n, 1)) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X_1 \times Y_2$ (Ver Figura 4.2.5). Nótese que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, se tiene que $(1/n, (1/n, m/n)) \in \{(1/n, (1/n, m/n))\} \in \tau_{X_1\times Y_2}$, pero $\{(1/n, (1/n, m/n))\} \cap A = \emptyset$. Ahora, sean $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$. Observemos que $(0, (1/n_0, m_0/n_0)) \in (\{0\} \cup \{1/k : k > n_0\}) \times \{(1/n_0, m_0/n_0)\} \in \tau_{X_1\times Y_2}$. Dado que $1/k < 1/n_0$ para todo $k > n_0$, se tiene que $[(\{0\} \cup \{1/k : k > n_0\}) \times \{(1/n_0, m_0/n_0)\}] \cap A = \emptyset$. Finalmente, sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $g^{-1}[Y_2 \setminus \{(1/n, 1)\}] = g^{-1}[Y_2 \setminus \{(1/n, n/n)\}] = X_2 \setminus \{(1/n, n)\}$. Dicho subconjunto es abierto en X_2. Dado que Y_2 esta dotado con la topología cociente, se tiene que $(Y_2 \setminus \{(1/n, 1)\}) \in \tau_{Y_2}$. Así, $(1/n, (0, 0)) \in (\{1/n\} \times (Y_2 \setminus \{(1/n, 1)\})) \in \tau_{X_1\times Y_2}$, pero dicho conjunto tiene intersección vacía con A. Los puntos descritos anteriormente no pertenecen a la cerradura del subconjunto A en $X_1 \times Y_2$. Veremos que $(0, (0, 0)) \in \mathrm{Cl}_{X_1\times Y_2} A$. Sean $l \in \mathbb{N}$ y $O \in \tau_{Y_2}$ tales que $(0, (0, 0)) \in (\{0\} \cup \{1/n : n \geq l\}) \times O \in \tau_{X_1\times Y_2}$. La Afirmación 2.11 garantiza la existencia de una sucesión $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $(0, (0, 0)) \in (\{0\} \cup \{1/n : n \geq l\}) \times (\{(0, 0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\}) \subseteq (\{0\} \cup \{1/n : n \geq l\}) \times O$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq l$ y $w = \text{máx}\{k_0, s_{k_0}\}$. De esta manera, $(1/w, (1/w, w/w)) = (1/w, (1/w, 1)) \in [(\{0\} \cup \{1/n : n \geq l\}) \times (\{(0, 0)\} \cup \{(1/n, k/n) : n \geq s_k\})] \cap A$. Concluimos que $(\mathrm{Cl}_{X_1\times Y_2} A) \setminus A = \{(0, (0, 0))\}$. Ahora, sea $U = \{(0, 0)\} \cup \{(1/n, k/n) : k \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq k + 1\}$. Observemos que $g^{-1}[U] = g^{-1}[\{(0, 0)\} \cup \{(1/n, k/n) : k \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq k + 1\}] = \{(0, k) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(1/n, k) : k \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq k + 1\} \in \tau_{X_2}$. Es decir, $U \in \tau_{Y_2}$. Se tiene que $(0, (0, 0)) \in X_1 \times U \in \tau_{X_1\times Y_2}$, pero dicho subconjunto tiene intersección vacía con A. Esto prueba que existen subconjuntos abiertos de $X_1 \times Y_2$ que dejan fuera a todos los elementos de A y por tanto a todos los elementos de cualquier suseción contenida en A. Lo que quiere decir que no existe $\{(s_i, t_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\text{lím}(s_i, t_i) = (0, (0, 0))$. Con lo que se tiene que

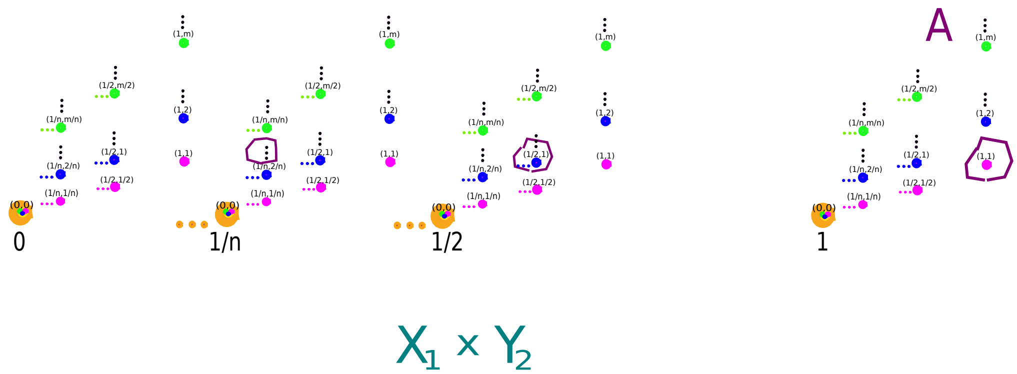

Figura 4.1:

$(X_1, \tau_{X_1}) \times (Y_2, \tau_{Y_2})$ no puede ser secuencial.

De la Proposición 4.28 se tiene que $\langle\{(X_1, \tau_{X_1}), (Y_2, \tau_{Y_2})\}\rangle \cap F_2(Y)$ es un subconjunto cerrado de $F_n(Y)$ homeomorfo a $(X_1, \tau_{X_1}) \times (Y_2, \tau_{Y_2})$. Esto y la Proposición 4.27 implican que $F_n(Y)$ es no secuencial, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, f_n no es cociente.

Observación 4.31. *El ejemplo 4.30 muestra que:*

a) *Si (X, τ_X), (Y, τ_Y) son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función pseudo abierta, entonces no necesariamente se satisface que f_n sea pseudo abierta.*

b) *Si (X, τ_X), (Y, τ_Y) son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función cociente, entonces no necesariamente se satisface que f_n sea cociente.*

4.2.6. Funciones inducidas de funciones semi abiertas

Teorema 4.32. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si $n \in \mathbb{N}$ y f_n es semi abierta, entonces f es semi abierta.*

Demostración. Sea $B \subseteq Y$ tal que $\mathrm{Cl}_Y B = Y$. Notemos que $\langle\{\mathrm{Cl}_Y B\}\rangle = \langle\{Y\}\rangle = F_n(Y)$. Sabemos de la Proposición 4.9 que $\langle\{\mathrm{Cl}_Y B\}\rangle = \mathrm{Cl}_{F_n(Y)}\langle\{B\}\rangle$.

De lo anterior y del Teorema 2.24 se obtiene que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle\{B\}\rangle] = F_n(X)$. Esto y la Proposición 4.13 implican que $F_n(X) = \langle\{X\}\rangle \subseteq \langle\{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B]\}\rangle$. Por tanto, $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[B] = X$, es decir, $f^{-1}[B]$ es un subconjunto denso de X. Del Teorema 2.24 se concluye que f es semi abierta. $\square$

El recíproco del Teorema 4.32 se prueba en [3, Teorema 10.1, pág. 509], en cuya demostración se asegura que $\langle\{\mathrm{Int}_Y f(U) : U \in \mathcal{U}\}\rangle \subseteq f_n(\langle\mathcal{U}\rangle)$, lo cual ya vimos que no siempre es cierto (Ver Ejemplo 4.18 y Observación 4.19). Así que [3, Teorema 10.1, pág. 509] no garantiza que f_n sea semi abierta.

Proposición 4.33. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) espacios de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva y $n \in \mathbb{N}$. Si $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ para todo $U, V \in \tau_X$ tal que $U \cap V = \emptyset$, entonces, f es semi abierta si y solo si f_n es semi abierta.*

La demostración se sigue del Teorema 4.32, y de las Proposiciones 4.2, 4.14 y 4.6.

4.2.7. Funciones inducidas de funciones denso abiertas

Teorema 4.34. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios de Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si $n \in \mathbb{N}$ y f_n es denso abierta, entonces f es denso abierta.*

Demostración. Sea $W \in \tau_Y$. Dado que $\langle\{W\}\rangle \in \tau_{F_n(Y)}$, del Teorema 2.26 y de la Proposición 4.9 se sigue que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)} f_n^{-1}[\langle\{W\}\rangle] = f_n^{-1}[\mathrm{Cl}_{F_n(Y)}\langle\{W\}\rangle] = f_n^{-1}[\langle\{\mathrm{Cl}_Y W\}\rangle]$. De esta igualdad y de la Proposición 4.11 obtenemos que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)}\langle\{f^{-1}[W]\}\rangle = \langle\{f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]\}\rangle$. Por otro lado, de la Proposición 4.9 se tiene que $\mathrm{Cl}_{F_n(X)}\langle\{f^{-1}[W]\rangle\rangle = \langle\{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W]\}\rangle$. Así, $\langle\{\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W]\}\rangle = \langle\{f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]\}\rangle$ y por tanto, $\mathrm{Cl}_X f^{-1}[W] = f^{-1}[\mathrm{Cl}_Y W]$. Del Teorema 2.26 concluimos que f es denso abierta.

$\square$

Bibliografía

[1] J.G. Anaya, F. Capulín, D. Maya, F. Orozco- Zitli, *Induced mappings on symmetric products of continua*, Topology. Appl. **214** (2016), pp. 100-108.

[2] F. Barragán, *Induced maps on n-fold symmetric product suspensions*, Topology Appl. **158** (2011), pp. 1192-1205.

[3] F. Barragán, S. Macías and J. F. Tenorio, *More on induced maps on n-fold symmetric product on suspension*, Glas. Mat. Ser. III, **50** (2015) no. 2, pp. 489-512.

[4] J. Dugundji, Topology, Primera Edición, Allyn and Bacon, USA. 1966.

[5] P. R. Halmos, Teoría intuitiva de los conjuntos, Continental, S.A. Méxio, 1980.

[6] G. Higuera, A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc. **37** (2011), pp. 367-411.

[7] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math, Vol. 21 No. 1 (1997), pp. 239-250.

[8] A. Illanes, J. A. Naranjo-Murillo, J. E. Vega, Y. N. Velazquez-Inzunza, *Induced mappings on symmetric products, some answers*, Topology Appl. **243** (2018), pp. 52-64.

[9] S. Lipschutz, Teoria y problemas de Topología General, McGRAW-HILL, Colombia.

[10] J. R. Munkres, Topolgía, Segunda Edición, Prentice Hall, Madrid, 2002.

[11] A. Tamariz Mascarúa, Topología General, Porrúa, S.A. México, 1988.